DM7 – Ondes (à rendre le 01/03/2018)

***Exercice 1* : ex3 du TD**

***Problème 2* : Ondes sonores dans un tube** *(extrait CCP PSI 2010)*

EQUATION DE PROPAGATION D'UNE ONDE SONORE DANS UN TUBE

On considère un tube indéformable de longueur L, d'axe de révolution (Ox) rempli d'air, supposé être un gaz parfait à la température moyenne ambiante T_0 et à la pression P_0. Soit ρ_0 la masse volumique moyenne de cet air. La section transverse du tube est une fonction de l'abscisse x : soit $S(x)$ cette section (figure 3).

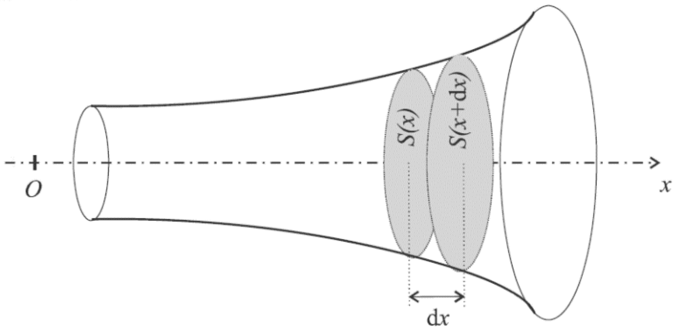

Figure 3 : Petite tranche d'air dans un tube acoustique de section variable

En présence de l'onde sonore, le champ de vitesse de l'air est le suivant : $\vec{u}(x,t) = u(x,t)\,\vec{e}_x$ où $u(x,t)$ est faible.

On note $\rho(x,t)$ la masse volumique de l'air à l'instant t et à l'abscisse x.

On supposera qu'en présence de l'onde sonore, la masse volumique de l'air s'écrit $\rho(x,t) = \rho_0 + \mu(x,t)$ où $\mu(x,t) << \rho_0$ et que la pression de l'air s'écrit $P(x,t) = P_0 + p(x,t)$ avec $p(x,t) << P_0$.

Bilan de masse sur un système ouvert

On s'intéresse à l'air compris entre les sections d'abscisses x et $x + dx$. Ce système est **ouvert**.

A.1 Exprimer la masse $dm(t)$ de ce système à l'instant t en fonction de $S(x)$ notamment. Même question pour l'instant $t + dt$.

A.2 Exprimer la masse δm_e de fluide entrant dans le système pendant la durée dt en fonction de $\rho(x,t)$, $S(x)$ et $u(x,t)$. Exprimer aussi la masse δm_s de fluide sortant du système pendant la même durée.

A.3 En se limitant à des termes du premier ordre, montrer que l'on obtient l'équation de conservation de la masse suivante : $S(x)\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \dfrac{\partial (Su)}{\partial x} = 0$.

Equation du mouvement

On rappelle l'équation d'Euler régissant la dynamique des fluides parfaits :

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}+\left(\vec{u}\cdot\overrightarrow{grad}\right)\vec{u}\right)=-\overrightarrow{grad}P$$

A.4 On appelle τ la durée caractéristique de variation temporelle de la vitesse, L la distance caractéristique de variation spatiale de la vitesse et U l'ordre de grandeur caractéristique de la vitesse particulaire. A quelle condition sur U peut-on négliger le terme $\left(\vec{u}\cdot\overrightarrow{grad}\right)\vec{u}$ devant le terme $\dfrac{\partial \vec{u}}{\partial t}$?

A.5 A l'aide d'un développement limité à l'ordre 1, exprimer la quantité $\rho_0\dfrac{\partial u}{\partial t}$ en fonction de $\dfrac{\partial p(x,t)}{\partial x}$.

A.6 On rappelle que le coefficient de compressibilité isentropique χ_s est égal à $\dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{\partial \rho}{\partial P}\right)_s$. Toujours à l'aide d'un développement limité à l'ordre 1, établir une relation entre $\mu(x,t)$, χ_s, ρ_0 et $p(x,t)$.

Equations de propagation

A.7 En combinant les résultats de **A.3**, **A.5** et **A.6**, montrer que :

$$\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial t^2}=c^2\left(\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2}+\left(\frac{1}{S(x)}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}\right)\frac{\partial p(x,t)}{\partial x}\right) \qquad \text{(équation } \mathbf{E1}\text{)}$$

et que :

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=c^2\left(\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+\left(\frac{1}{S(x)}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}\right)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{S(x)}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}\right)\cdot u(x,t)\right) \qquad \text{(équation } \mathbf{E2}\text{)}$$

Préciser l'expression de la constante c en fonction de ρ_0 et de χ_s.