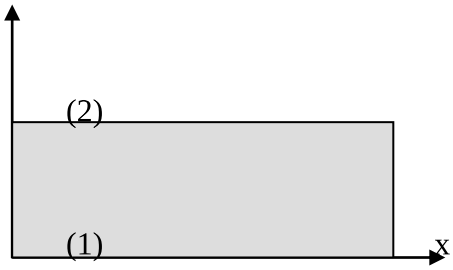
Mécaflu TD2 – Dynamique des fluides visqueux – Ecoulement dans conduites – Force de traînée

Exercice 1 : Etude d'une transmission

Etude en cartésien unidimensionnel d'une transmission mécanique par l'intermédiaire d'un fluide
Application concrète d'un écoulement de Couette
Calcul de la puissance associée à la force de viscosité



Une surface plane (1) d'aire S, entrainée par un moteur, est en translation de vitesse constante $\vec{v}_1 = v_1\vec{u}_x$.
Une surface plane parallèle (2) entraine un mécanisme (non-représenté) qui exerce en retour une force résistante constante sur la surface (2) :

$$\vec{F} = F.\vec{u}_x \quad \text{avec } F < 0$$

L'espace entre les deux plans est rempli par un liquide incompressible de masse volumique ρ et de viscosité η. Leur écartement est e. Les dimensions latérales sont très grandes devant e, et on admet que la vitesse ne dépend que de y et varie linéairement avec y (écoulement de « Couette plan »).

Données : $\nu = 1.3.10^{-4}$ m^2.s^{-1} ; $\rho = 900$ kg.m^{-3} ; $v_1 = 10$ m.s^{-1} ; F = -0.47 N ; S = 100 cm^2 ; e = 3,6 mm

1. Déterminer, en régime permanent, la vitesse v_2 de la plaque (2).
2. P_1 représentant la puissance fournie par la plaque (1) au fluide, et P_2 la puissance fournie par le fluide à la plaque (2), définir et calculer le rendement énergétique de la transmission.
3. Déterminer la force F pour laquelle le rendement est de 90 %.
Réponses : F = 0,325 N.

Exercice 2 : Equation de Navier-Stokes adimensionnée

S'entraîner à l'analyse dimensionnelle
Etablir Navier-Stokes adimensionnée et y faire apparaître le nombre de Reynolds
Vérifier alors que l'EDP est la même pour toute une classe d'écoulements (intérêt maquettes)

On considère un écoulement rectiligne de masse volumique ρ, de viscosité η, de vitesse caractéristique U_c , dont les champs varient sur une longueur caractéristique L_c. Seules les forces de pression et de viscosité sont prises en compte (on ne tient donc pas compte de la pesanteur). La coordonnée repérant la position d'un point est la coordonnée x.

1. Former à l'aide des grandeurs U_c, L_c et ρ un temps caractéristique τ_c et une pression caractéristique P_c
2. On définit les grandeurs adimensionnées $v^* = v/U_c$; $x^* = x/L_c$; $t^* = t/\tau_c$ et $P^* = P/P_c$
Montrer que l'on peut alors adimensionner tous les termes de l'équation de Navier-Stokes (opérateurs compris) en introduisant un facteur constant K :

$$\frac{\partial\overrightarrow{v^*}}{\partial t^*} + \left(\overrightarrow{v^*}\cdot\overrightarrow{grad}^*\right)\overrightarrow{v^*} = -\overrightarrow{grad}^*(P^*) + K\,\vec{\Delta}^*\left(\overrightarrow{v^*}\right)$$

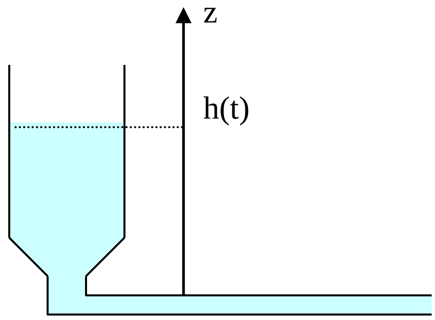
où K est une constante à définir. De quel unique facteur dépend la solution de l'équation ?

3. On étudie un avion de longueur L destiné à voler à vitesse U dans l'air. Une maquette de cet avion à l'échelle 1/10$^{\text{ème}}$ est étudiée dans une soufflerie à air. Quelle doit être, en fonction de U, la vitesse de l'écoulement ?

4. Au lieu d'une soufflerie à air, on utilise une veine liquide (tunnel à écoulement d'eau). Quelle vitesse doit avoir l'eau pour simuler la réalité ?
Données : $\eta_{air} = 1{,}8.10^{-5}$ Pl ; $\eta_{eau} = 1{,}0.10^{-3}$ Pl.

Exercice 3 : Viscosimètre à écoulement

Découvrir une manière de mesurer la viscosité cinématique d'un fluide
Exploiter la conservation de la masse sur système macro
Comparer des odg pour valider une hypothèse simplificatrice



Un liquide visqueux considéré comme incompressible s'écoule lentement d'un récipient cylindrique de diamètre D dans un tube horizontal de diamètre d et de longueur L. Soient ρ sa masse volumique et η sa viscosité dynamique. On définit (nu) $\nu \stackrel{\text{def}}{=} \eta/\rho$ sa viscosité *cinématique*.
<u>Données</u> : D = 2R = 4 cm ; L = 50 cm ; d = 1 mm ; g = $10 m.s^{-2}$.

1. Pourquoi peut-on considérer l'écoulement dans le récipient comme quasi-stationnaire ?
Il n'est pas possible de répondre rigoureusement à cette question. Il vaudrait mieux dire que l'on fait cette hypothèse, et ajouter que l'on vérifiera sa validité à la fin de l'exo. Mais ce type de questions peut hélas tomber aux concours. Il vous faut donc donner une réponse qualitative pertinente (même si elle vous paraît insatisfaisante intellectuellement).

2. En déduire l'expression du débit volumique D_v en fonction de h, en utilisant la loi de Poiseuille (sans démo):

$$D_v = \frac{\pi R^4}{8\eta L}\Delta P$$

3. A partir de l'équation de conservation de la masse appliquée à un système ouvert bien choisi, établir une équation différentielle satisfaite par h(t), et définir un temps τ caractéristique de vidange. La résoudre pour la condition initiale $h(t_0) = h_0$.

4. Il faut 59 minutes pour que le niveau du liquide passe de h = 6 cm à h = 3 cm. Déterminer la viscosité cinématique du fluide.

5. En se plaçant dans le tube, comparer les ordres de grandeur de l'accélération locale et du terme de viscosité dans l'équation de Navier-Stokes (attention à ce que les deux termes soient homogènes…), et valider l'hypothèse de stationnarité faite à la première question.

Exercice 4 : Couette cylindrique (adapté viscosimètre de Couette E3A PC 2009)

Calculs en coordonnées cylindriques, notamment résultante des forces de viscosité
Ftude d'un dispositif expérimental classique permettant de mesurer la viscosité d'un fluide

D / FLOT DE COUETTE

La rhéologie est l'étude de la déformation et de l'écoulement de la matière sous l'effet d'une contrainte.

Considérons un écoulement laminaire permanent entre deux cylindres infinis, d'axe commun Oz (dénommé flot de Couette), de rayons respectifs R_1 et $R_2 > R_1$, animés d'un mouvement de rotation uniforme avec des vitesses angulaires $\Omega_1 \vec{e}_z$ et $\Omega_2 \vec{e}_z$ (figures 2a et 2b).

Entre les deux cylindres s'écoule un fluide homogène, incompressible, supposé newtonien, de viscosité dynamique η et de masse volumique μ . Cet écoulement peut être décrit comme un ensemble de couches cylindriques coaxiales, animées de vitesses angulaires différentes. Aucun gradient de pression n'est appliqué extérieurement, le long de l'axe Oz. L'action de la pesanteur est négligée.

Dans un système de coordonnées cylindriques (r, θ, z), la vitesse en tout point du fluide et à chaque instant s'écrit : $\vec{V} = V_r(r,t)\,\vec{e}_r + V_\theta(r,t)\,\vec{e}_\theta + V_z(r,t)\,\vec{e}_z$.

<u>**D1.**</u> Montrer, en utilisant les caractéristiques de l'écoulement ainsi que les conditions aux limites (fluide au contact des cylindres), que la vitesse est orthoradiale et s'écrit : $\vec{V} = V(r)\,\vec{e}_\theta$.

Rappel de l'équation de Navier-Stokes : $\mu\left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \left(\vec{V}\cdot\overrightarrow{grad}\right)\vec{V}\right] = -\overrightarrow{grad}\,P + \eta\,\overrightarrow{\Delta V}$, *pour laquelle sont données les expressions du terme inertiel et du laplacien, en coordonnées cylindriques :*

$$\left(\vec{V}\cdot\overrightarrow{grad}\right)\vec{V} = -\frac{V^2}{r}\vec{e}_r \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\Delta V} = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dV}{dr}\right)\overrightarrow{e_\theta} - \frac{V}{r^2}\overrightarrow{e_\theta}.$$

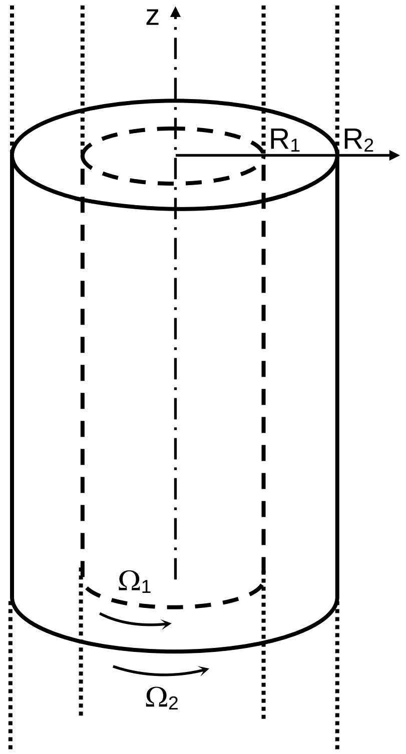


Figure 2a

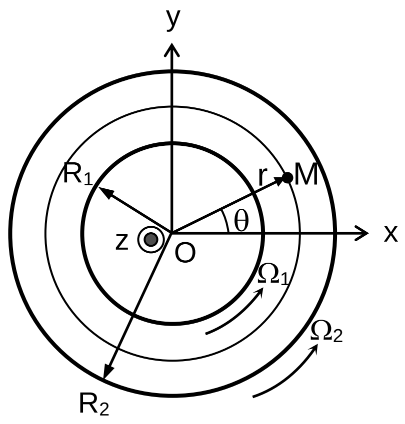


Figure 2b

Relations d'analyse vectorielle en coordonnées cylindriques : $\overrightarrow{grad}\, g = \frac{\partial g}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial g}{\partial z}\vec{e}_z$

$$div\,\vec{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\, v_r\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \qquad \Delta v = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

D2. Projeter l'équation de Navier-Stokes selon $\vec{e}_r$. Expliquer ce que traduit physiquement la relation ainsi obtenue. Préciser la conséquence du signe du gradient de pression dP/dr.

D3*a. Etablir, grâce à la projection de l'équation de Navier-Stokes selon $\vec{e}_\theta$, que la vitesse V(r) doit satisfaire l'équation différentielle suivante :

$$r^2\frac{d^2V}{dr^2} + r\frac{dV}{dr} - V = 0 \ .$$

D3*b. Vérifier qu'une expression du type $V(r) = A\,r + B/r$ est solution de cette équation différentielle.

D3*c. Ecrire les conditions aux limites pour la vitesse, afin de traduire l'adhérence du fluide sur les parois des deux cylindres. En déduire les expressions des constantes A et B.

E / VISCOSIMETRE DE COUETTE

Cet appareil (inventé par M. Couette en 1890) est constitué de deux cylindres concentriques de rayons R_1 et $R_2 > R_1$, de hauteur h. Le fluide homogène, incompressible, assimilé à un fluide newtonien, de viscosité dynamique inconnue η occupe l'espace entre les deux cylindres. Le grand cylindre est immobile, tandis que le cylindre intérieur tourne à vitesse angulaire uniforme $\Omega_1 = \Omega$ autour de l'axe vertical Oz. (figure 3)

La différence $R_2 - R_1$ est faible devant R_1 et devant h ; ainsi les effets de bord (fond du récipient et niveau supérieur) seront négligés et les résultats obtenus en sous-partie D pourront être appliqués. Les forces de pesanteur demeurent négligeables devant les forces de frottement visqueux.

E1. Préciser les valeurs des constantes A et B de la loi de vitesse V(r), dans le cas du rhéomètre de Couette.

E2. Montrer que cette vitesse peut s'écrire : $V(r) = K\left(-r + \frac{\beta}{r}\right)$. Identifier K et β.

Représenter (dans le plan de coupe des cylindres) les variations de V(r)/K en fonction de r, entre R_1 et R_2 ; en déduire le tracé schématique des vecteurs vitesse du fluide entre les deux cylindres.

Intéressons-nous à une tranche de fluide comprise entre les cylindres fictifs de rayons r et r+dr ; les contraintes visqueuses s'exerçant sur la couche fluide cylindrique de rayon r sont réductibles à des forces par unité de surface dΣ, qui en coordonnées cylindriques s'écrivent :

$$\frac{d\overrightarrow{F}_{vis}}{d\Sigma} = -\eta\, r \frac{d}{dr}\left(\frac{V}{r}\right)\overrightarrow{e_\theta}.$$

E3*a. Exprimer la force élémentaire de frottement visqueux $\overrightarrow{\delta F_{vis}}$ qui s'exerce sur un élément de surface du cylindre fictif de rayon r.

E3*b. En déduire le moment élémentaire $\overrightarrow{\delta \Gamma_{vis}}$ par rapport à l'axe Oz de cette force élémentaire de frottement visqueux appliquée sur le même cylindre fictif.

Réalisons un bilan des actions subies par le système (S) constitué par le fluide en rotation, compris entre les cylindres de rayon r et r+dr, sur une hauteur h. Le régime permanent d'écoulement est supposé établi entre les cylindres.

E4*a. Préciser la caractéristique du moment cinétique scalaire σ_Δ, selon Oz, du système (S).

E4*b. Ecrire le théorème du moment cinétique scalaire appliqué au système (S).
Analyser avec soin les contributions respectives des différentes forces appliquées au système (S) (pression, viscosité, …).

E4*c. Déterminer le moment Γ résultant des forces de viscosité s'exerçant sur le cylindre de rayon R_1, qu'il est nécessaire d'appliquer sur ce cylindre pour le faire tourner à la vitesse angulaire Ω ; l'écrire sous la forme $\Gamma = K\,\eta\,\Omega$ et identifier K.

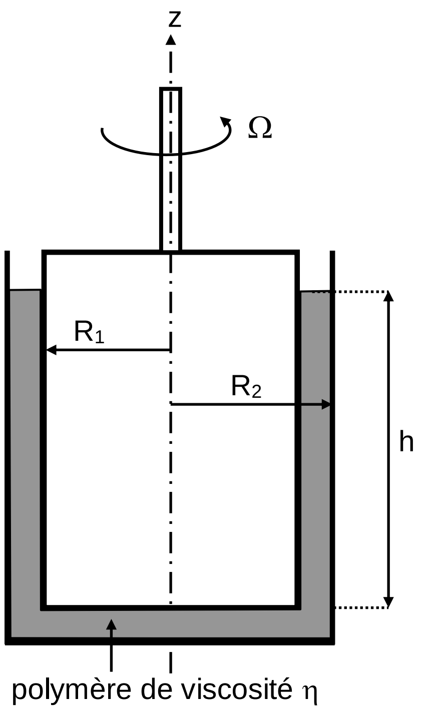


Figure 3

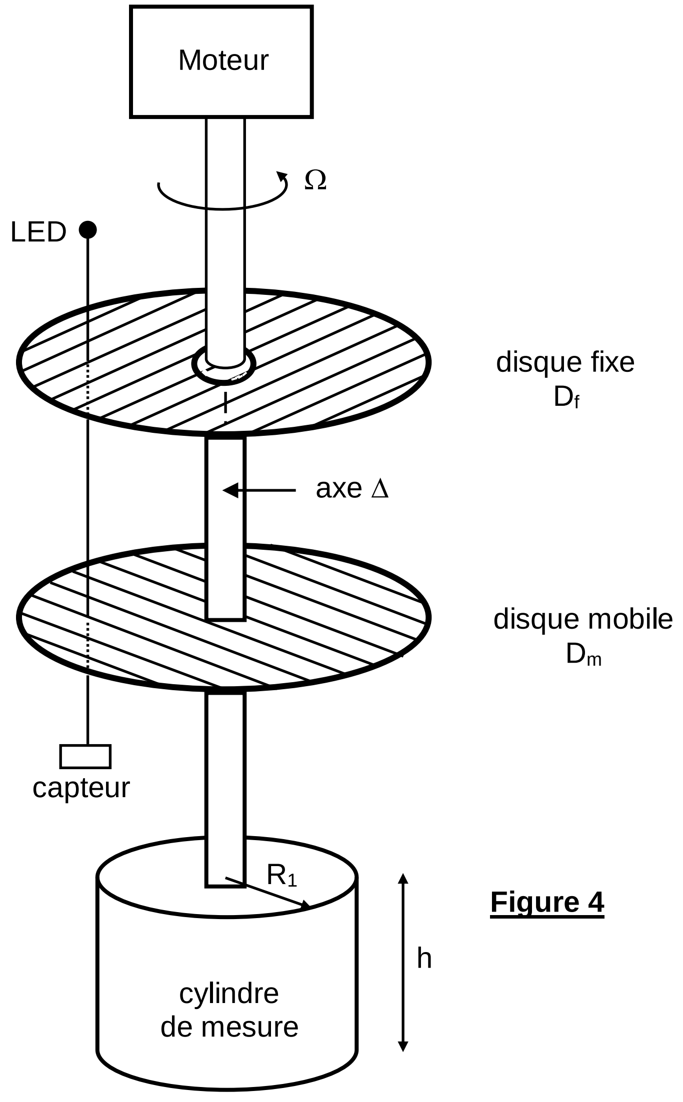


Figure 4

Exercice 5 : Puissance d'un cyclise pour compenser la traînée
Evaluer dans un cas concret les conséquences de la force de traînée pour la traction d'un véhicule
Montrer que la puissance croît avec le cube de la vitesse

On considère un cycliste roulant à v = 36 km.h^{-1}. On pourra utiliser l'abaque du cours pour déterminer C_x.
Données : viscosité air : η= 1,8.10^{-5} Pl ; masse totale M = 100 kg.

1. En modélisant le cycliste d'une manière très simple, montrer que la puissance P_v nécessaire pour contrer la résistance de l'air est proportionnelle au cube de sa vitesse.
2. Ce cycliste gravit une pente à 2,5 % (rapport entre l'augmentation d'altitude et la distance parcourue). La puissance P_v est-elle supérieure à la puissance du poids ?

Exercice 6 : Acheminement de pétrole dans une conduite
Odg de la puissance linéique qu'une pompe doit dépasser pour faire avancer un fluide dans une conduite

On fait couler du pétrole dans une conduite de diamètre D = 50 cm avec un débit D = 50 L.s^{-1}.
1. Calculer la vitesse moyenne d'écoulement .
2. Calculer le nombre de Reynolds.
3. Calculer la puissance linéique dissipée par les forces de viscosité (par kilomètre de conduite).
Données : ρ = 870 kg.m^{-3} ; η = 0,25 Pa.s.
Réponses (je n'ai pas vérifié) : Re = 443 ; P = 407 W.

Exercice 7 : Goutte de pluie
S'entraîner à choisir le bon modèle de traînée
Estimer l'ordre de grandeur d'un régime transitoire
S'approprier un énoncé atypique

On étudie le mouvement de gouttes de pluie dans l'air (viscosité air η = 1,5.10^{-5} Pl).

1. En régime permanent, calculer la vitesse de chute v d'une goutte de rayon $r = 1{,}0\ 10^{-5}$ m . On prendra soin de justifier le modèle de traînée adopté.
Quel est l'ordre de grandeur de la durée du régime transitoire de la chute de la goutte, en supposant la goutte initialement immobile ?

2. Dans un nuage, les grosses gouttes absorbent les petites gouttes chaque fois qu'elles en touchent une. En supposant que la densité volumique n de microgouttes (toutes de même rayon r) est uniforme dans le nuage, exprimer la variation dr du rayon d'une grosse goutte, de rayon initial $R_i \gtrsim 100\ r$, lorsqu'elle chute d'une hauteur $dz = v\ dt$.
En déduire comment évolue le rayon $R(t)$ au cours du temps.
Calculer la durée nécessaire pour que le rayon de la grosse goutte double de taille.
AN : $R_i = 0{,}5\ mm$ et $n = \frac{10^{-6}}{V_{nuage}}$; où V_{nuage} est le volume occupé par le nuage.

ResPb 8 : Vent contre voiture

Est-il raisonnable de dire que le vent peut renverser une voiture de dimension « usuelle » ?

On pourra s'aider de l'abaque du cours donnant le coefficient de traînée