DM1 – Méca en référentiel non galiléen – Révision élec de PCSI

***Exercice 1** : Pendule de Foucault*

On cherche à étudier le pendule de Foucault dans différentes situations.
L'étude est réalisée dans le référentiel géocentrique qu'on suppose galiléen.

On prendra pour l'accélération de la pesanteur :

- au pôle nord : g_{pole} =9,82 m.s^{-2}
- à Paris g_{Paris} = 9,81 m.s^{-2}
- à l'équateur g_{Eq} = 9,78 m.s^{-2}

R = 6400 km pour le rayon de la terre (supposée sphérique).

1. PENDULE DU PÔLE :

On se place dans un premier temps au pôle Nord avec un pendule constitué d'un fil (de masse négligeable) de longueur L = 70 m de longueur au bout duquel une masse M = 28 kg est fixée. L'attache du fil est fabriquée de manière à assurer au pendule la possibilité de se balancer avec la même liberté quelle que soit la direction. On suppose que le système est tel que les frottements et dissipations puissent être négligés en première approximation et que le fil est parfaitement rigide.

1.1. Montrer par une méthode énergétique que la période T_1 de ce pendule dans l'hypothèse des faibles amplitudes est donnée par :

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Application numérique.

1.2. Si on fournit à t=0 une énergie totale à ce système de 100 J comment vont varier au cours du temps l'énergie cinétique et l'énergie potentielle (répondre sans calcul avec éventuellement un graphique pour illustrer votre propos) ?

1.3. Quelle est l'amplitude maximale q_M des oscillations correspondantes ?

1.4. Au bout d'un balancement complet (aller-retour) du pendule, de quel angle le référentiel terrestre aura-t-il tourné ?

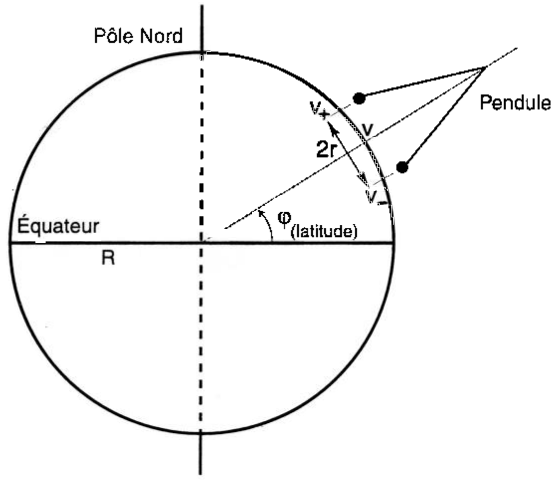
1.5. Si maintenant, on trace au sol l'ensemble des projections des points pour lesquels l'énergie cinétique du pendule est nulle quelle figure génère-t-on ?

1.6. Sachant que la terre fait une rotation complète autour de son axe en T_0 = 24 heures, combien de temps faut-il au pendule pour parcourir intégralement cette figure ?

2. PENDULE DU PANTHÉON

On place maintenant au sein du Panthéon à Paris un pendule en tout point identique au précédent : constitué d'un fil (de masse négligeable) de L = 70 m de longueur au bout duquel une masse M = 28 kg est fixée. L'attache du fil est également fabriquée de manière à assurer au pendule la possibilité de se balancer avec la même liberté quelle que soit la direction. On suppose que le système est tel que les frottements et dissipations puissent être négligés en première approximation et que le fil est parfaitement rigide.

2.1. Quelle est la période T_2 de ce pendule ?



2.2. Sachant que la latitude de cette ville est φ = 48°51' Nord, quelle est, au repos, la vitesse de rotation v_0 (en m/s et en km/h) de notre pendule autour de l'axe de la terre suite au mouvement de cette dernière ?

2.3. Si on lançait le pendule sur une oscillation Nord-Sud, sans rotation de la terre, le pendule oscillerait entre deux points de latitude $\varphi + \Delta\varphi$ et $\varphi - \Delta\varphi$ distants de 2r (voir figure ci-dessus). Déterminer la relation simple entre r, R et tan($\Delta\varphi$). Que devient cette relation si $\Delta\varphi << 1$?

2.4. Considérant maintenant la rotation de la terre, déterminer dans le référentiel géocentrique les vitesses v_+ et v_- de ces deux points autour de l'axe de la terre suite au mouvement de cette dernière ainsi que l'écart en vitesse Dv de ces points par rapport à v_0.
On pourra utiliser la forme : $\cos(\varphi + \Delta\varphi) - \cos(\varphi) = -\sin(\varphi)\,\Delta\varphi$

On lance le pendule suivant un méridien (axe nord-sud) en le poussant à partir de son point au repos O. On a vu qu'en O la composante « est-ouest » de la vitesse sera v_0 et que, la terre tournant sur elle-même, les points d'amplitude maximale du pendule se déplacent avec une vitesse légèrement différente.

2.5. En déduire le temps T que mettra le pendule, pour un observateur immobile dans le Panthéon, pour faire un tour complet, sachant que la terre tourne autour d'elle-même en T_0 = 24 heures. Justifier votre réponse.

2.6. Quel est le sens de rotation du plan d'oscillation du pendule pour un observateur dans le Panthéon (justifier votre réponse) ?

2.7. Que se passe-t-il si on réalise cette expérience en un point de latitude λ = 48°51' Sud ?

2.8. Que se passe-t-il si on réalise cette expérience sur l'Equateur ?

2.9. On a réalisé des mesures de la période T en fonction de la latitude λ :

Lieu	Pole Nord	Kirkenes (Norvege)	Paris	Quito (Equateur)	Rio (Brésil)	Melbourne (Australie)
λ(°)	90,00	69,82	48,85	0,22	-22,95	-37,82
T	23 h 56 min	25 h 31 min	31 h 47 min	6329 h 17 min	61 h 31 min	39 h 02 min

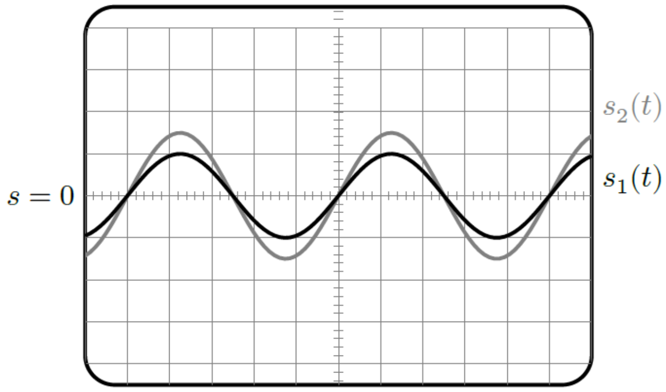
Montrer que la période T du pendule est bien inversement proportionnelle à sin(λ).

***Résolution de problème 2* : Identification d'un filtre** *(extrait concours Centrale MP)*

On cherche à identifier les propriétés d'un filtre linéaire d'ordre 2, considéré comme une « boîte noire ». Les figures ci-dessous représentent quatre oscillogrammes de l'entrée $s_1(t)$ et de la sortie $s_2(t)$ du filtre. Chaque oscillogramme a été tracé à une fréquence définie.

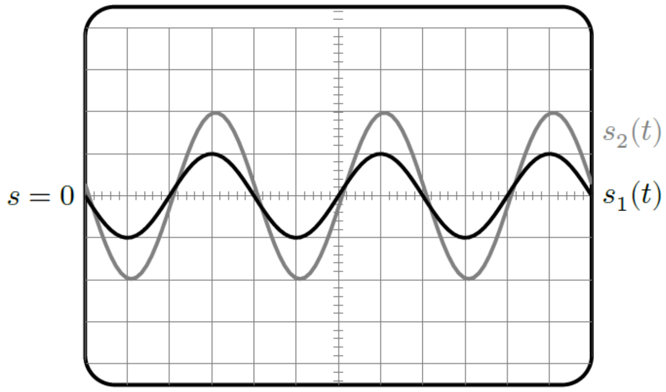
Déduire de ces quatre essais la nature du filtre testé, ainsi que ses caractéristiques : fréquence propre, fréquence de coupure, facteur de qualité. Expliciter clairement la démarche et commenter les résultats obtenus.

Essai 1



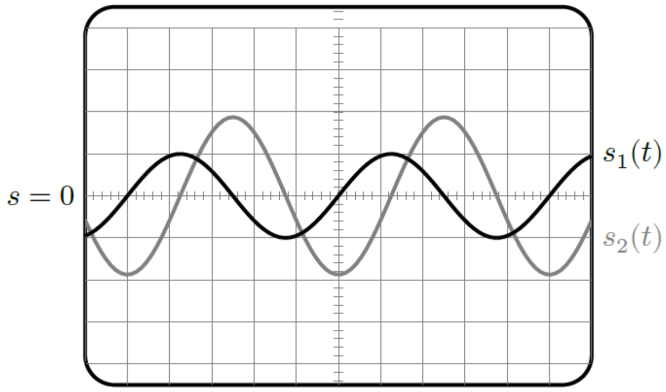
CH1 : 1 V/div CH2 : 1 V/div
Time : 2 ms/division

Essai 2



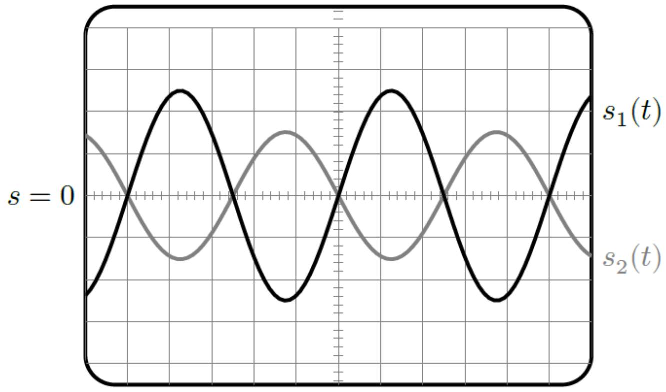
CH1 : 1 V/div CH2 : 1 V/div
Time : 50 µs/division

Essai 3



CH1 : 0,5 V/div CH2 : 2 V/div
Time : 20 µs/division

Essai 4



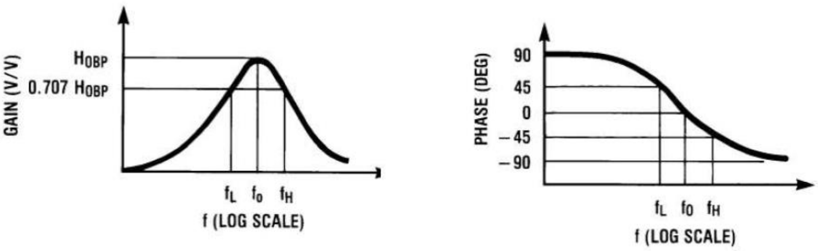
CH1 : 2 V/div CH2 : 50 mV/div
Time : 2 µs/division

Conseils :
Même si vous n'arrivez pas à trouver une stratégie complète de résolution, ne rendez pas copie blanche.
Après avoir cherché au brouillon (30min environ pour ce premier entraînement) une voie de résolution :
- rédigez proprement votre raisonnement, si vous pensez avoir trouvé la solution au problème
- rédigez proprement et de manière la plus ordonnée possible les idées qui vous sont venues à l'esprit et les liens que vous avez commencés à établir entre elles

Toute idée intéressante, même si elle ne vous amène pas à la conclusion finale, serait valorisée le jour d'une évaluation.

__Ci-dessous sont rappelés un certain nombre de propriétés des filtres d'ordre 2__ *(ne pas les démontrer)*

$$H_{BP}(s) = \frac{H_{OBP}\,\frac{\omega_O}{Q}\,s}{s^2 + \frac{s\omega_o}{Q} + \omega_o^2}$$



(a) (b)

$$Q = \frac{f_0}{f_H - f_L};\; f_0 = \sqrt{f_L f_H}$$

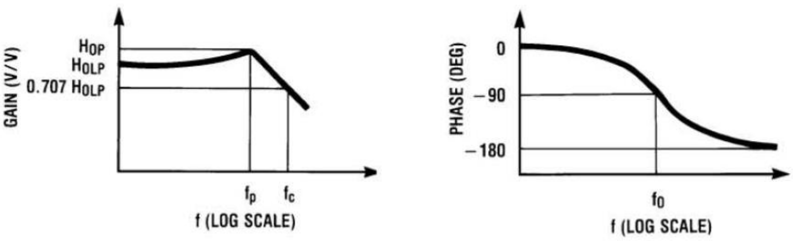
$$f_L = f_0\left(\frac{-1}{2Q} + \sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 + 1}\right)$$

$$f_H = f_0\left(\frac{1}{2Q} + \sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 + 1}\right)$$

$$\omega_o = 2\pi f_0$$

FIGURE 1. 2nd-Order Bandpass Response

$$H_{LP}(s) = \frac{H_{OLP}\,\omega_O^2}{s^2 + \frac{s\omega_o}{Q} + \omega_o^2}$$



(a) (b)

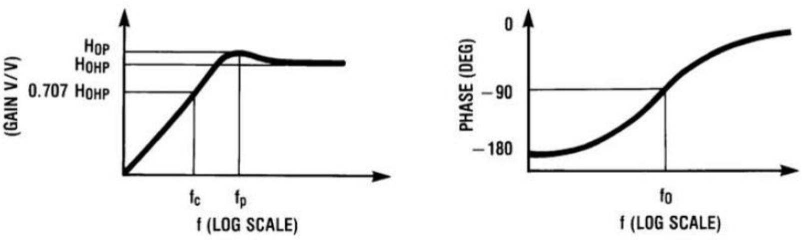
$$f_c = f_0 \times \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right) + \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)^2 + 1}}$$

$$f_p = f_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

$$H_{OP} = H_{OLP} \times \frac{1}{\frac{1}{Q}\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

FIGURE 2. 2nd-Order Low-Pass Response

$$H_{HP}(s) = \frac{H_{OHP}\,s^2}{s^2 + \frac{s\omega_o}{Q} + \omega_o^2}$$



$$f_c = f_0 \times \left[\sqrt{\left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right) + \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)^2 + 1}}\,\right]^{-1}$$

$$f_p = f_0 \times \left[\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}\right]^{-1}$$

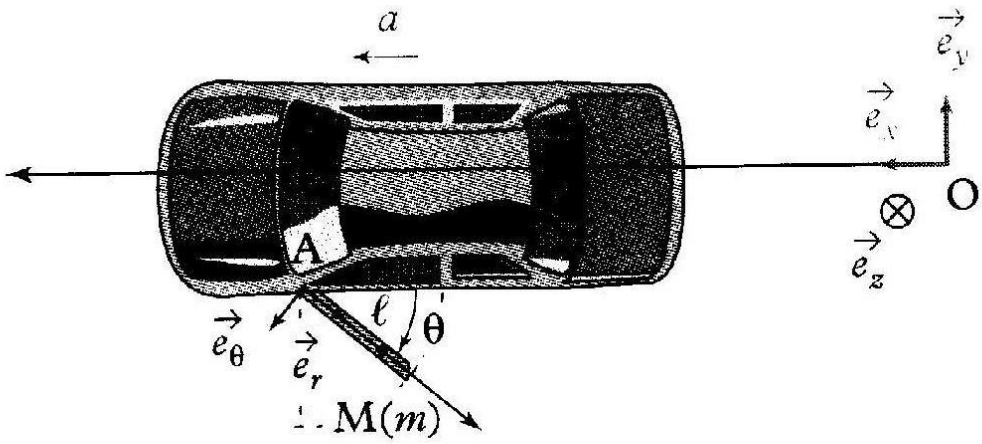
$$H_{OP} = H_{OHP} \times \frac{1}{\frac{1}{Q}\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

(b)

FIGURE 3. 2nd-Order High-Pass Response

Exercice 3 : Portière de voiture

La portière d'une voiture est restée entrouverte par inadvertance au moment où la voiture se met à freiner créant une décélération constante $\vec{a} = a\overrightarrow{e_x}$ (a < 0).
On veut étudier le mouvement de la porte pendant le freinage. Pour cela on la modélise par une tige rigide de masse négligeable de longueur l et une masse m placée au point M. On suppose que le référentiel terrestre est galiléen.



1. En se plaçant dans le référentiel de la voiture, établir l'EDiff du mouvement de la portière (variable θ).

2. En multipliant l'EDiff par $\dot{\theta}$, déterminer la vitesse de la porte quand θ = π/2 ($\theta(0) = 0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$).

3. On étudie désormais une phase d'accélération constante (a > 0). Au début du mouvement, la porte est ouverte d'un angle θ_0 et de vitesse nulle par rapport à la voiture. Pour que la porte se referme seule, il faut en outre que $\dot{\theta}(\theta = 0) > \dot{\theta}_{\min}$. Déterminer la relation entre θ_0 et a pour que cela soit possible.