Chap.1 – Fonction de transfert des systèmes linéaires

Intro :
Ce chapitre reprend plusieurs notions d'électrocinétique de première année. L'étude des systèmes linéaires ne concerne pas que l'électronique, mais aussi la mécanique, la thermique… tous les phénomènes régis par des équations différentielles linéaires à coefficients constants.

1. Etudier un système linéaire

*Un système est **linéaire** et **stationnaire** (ou invariant) si les grandeurs d'entrée et de sortie sont reliées par une **équation différentielle linéaire à coefficients constants***

- ❖ Qu'appelle-t-on *l'ordre* du système (ou de l'EDiff) ?
- ❖ Rappeler les notations canoniques de l'ESSM pour les EDiff du 1er et du 2e ordre. Nommer les paramètres introduits.

Exemples de systèmes linéaires :
- la plupart des circuits électriques de 1e année avec R, L, C sources de tension ou courant
- un système masse-ressort (type sismographe)
- un moteur électrique (relation entre courant d'alimentation et couple)
- pièce chauffée par un radiateur (relation entre la puissance d'alimentation et la température de la pièce)

Toute l'information sur le comportement du système linéaire est contenue dans les coefficients de l'EDiff.

Conséquence mathématique de la linéarité de l'EDiff :

!! Principe de superposition !!

Si l'entrée $\boldsymbol{e(t)}$ se décompose en une somme de signaux $\boldsymbol{e_i(t)}$,
alors la sortie correspondante $\boldsymbol{s(t)}$ est la somme des sorties $\boldsymbol{s_i(t)}$ associée à chaque composante $\boldsymbol{e_i(t)}$

On peut distinguer grossièrement deux types d'étude des systèmes linéaires : soit la composition du système est connue, et son EDiff aussi (on a pu l'établir, comme en première année) ; soit le système est une boîte noire dont on cherche à comprendre le comportement en la soumettant à divers signaux d'entrée.

Dans le premier cas, si on sait résoudre l'EDiff, la sortie peut être prédite pour une entrée donnée. En première année, les cas EDiff 1er et 2^{e} ordre ont été vus, pour des entrées : constante, nulle ou sinusoïdale.

- Rappeler comment résoudre une EDiff du 1er et 2^{e} ordre avec 2nd membre constant
- La solution générale se décompose en deux parties. Laquelle correspond au régime transitoire ?
- Quel est le seul type de régime transitoire d'un système du 1er ordre ?
- Quels sont les trois types de régimes transitoires d'un système du 2^{e} ordre ?
- Quel est le critère mathématique permettant de les distinguer ?

- Comment résoudre une EDiff dans le cas d'un second membre sinusoïdal ?

Dans le deuxième cas, on peut étudier la réponse harmonique ou la réponse indicielle pour déterminer le comportement général du système, voire déterminer l'EDiff qui régit son comportement. Ce type d'étude est abordé dans l'enseignement de S.I., nous ne l'aborderons donc pas en Physique.

2. Analyse de Fourier – Intérêt de l'étude harmonique

2.1. Décomposition en série de Fourier d'un signal périodique

Cette importance conférée à l'étude des signaux sinusoïdaux est la conséquence d'un résultat mathématique très important en physique :

*Tout signal **périodique** peut être décomposé en **une somme de signaux sinusoïdaux***

Ces notions mathématiques ont été introduites au début du XIX^{e} par le physicien et mathématicien Joseph Fourier, lors de ses travaux sur la propagation de la chaleur. Lorsque l'on décompose un signal en ses composantes sinusoïdales, on parle *d'analyse harmonique*, ou *analyse de Fourier*.

Elle s'applique à de très nombreux domaines de la physique : électronique, étude du son, optique, ondes mécaniques, etc. L'analyse de Fourier est un outil de base abondamment utilisé dans les télécommunications (TV, radio, internet, téléphonie…).

Seule la décomposition des signaux périodiques est au programme des classes prépa : on parle de *décomposition en série de Fourier*. En physique, aucun calcul n'est exigible, seule la compréhension physique de cette décomposition est à connaître :

- Donner l'expression de cette décomposition pour un signal de période T
- Repérer dans l'expression mathématique de cette décomposition :
  - la « composante de rang n » ou « harmonique de rang n »
  - la fréquence et l'amplitude de l'harmonique de rang n
  - la « composante continue »
  - la valeur moyenne
  - le « fondamental »
- Rappeler ce que représente le spectre de Fourier en amplitude.

Exemples : à visualiser sur le site http://gilbert.gastebois.pagesperso-orange.fr/java/fourier/fourier2/fourier2.html
- synthèse d'un créneau (ou triangle) par sommation successive de sinus
- d'autres animations possibles sur le même site

2.2. Analyse de Fourier d'un signal physique non périodique

Dans le cas d'un signal non périodique, on peut décomposer le signal en une somme continue (une intégrale) de sinus : c'est la transformée de Fourier (ressemble beaucoup à la transformée de Laplace). Une idée clef à retenir est que la largeur du spectre en fréquence est inversement proportionnelle à la durée du signal :

- une impulsion très brève a un spectre large en fréquence (contient beaucoup de fréquences)
- un signal sinusoïdal infini (non physique !) a un spectre constitué d'une seule fréquence

2.3. Intérêt de l'étude des systèmes linéaires en régime harmonique

Contrairement aux apparences, cette étude est très générale, puisqu'elle permet de déterminer la réponse du système à tout signal périodique (non-sinusoïdal) grâce à l'analyse de Fourier et au principe de superposition (cf. paragraphe 3.3).

3. Formalisme complexe – Fonction de transfert

3.1. Rappel notations complexes, fonction de transfert

L'expérience montre qu'un système linéaire soumis à une entrée sinusoïdale donne ***en régime permanent établi*** (le régime transitoire étant terminé) un signal de sortie ***sinusoïdal de même fréquence***.

- ❖ Ecrire mathématiquement la forme du signal de sortie. Nommer les différents paramètres.
- ❖ Définir mathématiquement le déphasage entre la sortie et l'entrée (ou 'avance de phase').
- ❖ Définir mathématiquement le signal complexe, l'amplitude complexe du signal.
- ❖ A partir de l'amplitude complexe, comment retrouve-t-on la phase à l'origine et l'amplitude réelle ?
- ❖ Définir la fonction de transfert du système linéaire. L'exprimer en fonction des coefficients de l'EDiff du système linéaire.

Lorsque l'on considère la fonction de transfert comme un simple outil de calcul (cf. chapitre 2 à venir), on pourra remplacer la notation $(j\omega)$ par la notation (p) utilisée en SI (transformée de Laplace).

3.2. Réponse harmonique d'un système linéaire : Méthodologie

- ❖ Comment calculer le gain, le gain en dB ? Quelle information physique donne le gain ?
- ❖ Comment calculer le déphasage ?
- ❖ Définir le diagramme de Bode.
- ❖ Définir les pulsations de coupure à 3dB. Définir la bande passante (qualitativement, puis math).

Ci-dessous les étapes classiques pour étudier la réponse harmonique, d'un filtre en élec par exple :

- o (Si demandé) Estimer la nature du filtre en s'aidant des circuits équivalents à BF et HF
- o Trouver l'expression de la FT
- o Etude *asymptotique* de la FT *directement*, puis en déduire le gain et le déphasage *asymptotiques*
- o Calculer le gain et le déphasage (pour toute fréquence)
- o Calculer les fréquences de coupure. En déduire la bande passante.

3.3. Application à une entrée périodique non sinusoïdale

On verra dans des chapitres ultérieurs qu'un moteur électrique à courant continu et son alimentation peuvent être modélisés respectivement par :

- ▪ deux dipôles en série : R et L (pour un moteur à l'arrêt)
- ▪ un générateur de tension créneau $e(t)$ oscillant dans [0, E] et branché aux bornes du moteur, pulsation ω_e

La décomposition en série de Fourier de ce créneau s'écrit :

$$e(t) = \frac{E}{2} + \frac{2E}{\pi}\left(\cos(\omega_e t) + \frac{1}{3}\cos(3\omega_e t) + \frac{1}{5}\cos(5\omega_e t) + \cdots\right)$$

- ❖ Déterminer l'équation différentielle vérifiée par le courant $i(t)$ circulant dans le moteur
- ❖ Déterminer la fonction de transfert, en choisissant $i(t)$ comme sortie
- ❖ Déterminer le gain et le déphasage en fonction de la fréquence
- ❖ En utilisant le principe de superposition, déterminer l'expression mathématique de la sortie $i(t)$
- ➢ *(Facultatif)* Donner l'équation différentielle vérifiée par $i_3(t)$ l'harmonique de rang 3

- ❖ Si le moteur est en rotation, il est alors modéliser par circuit RL en série avec une source idéale de tension U_0 (valeur proportionnelle à la vitesse angulaire de rotation). Comment modifier l'étude précédente ?

4. Critères de non linéarité

4.1. Présence d'éléments non linéaires

Si le système est composé d'éléments non-linéaires, son comportement global sera vraisemblablement non linéaire. En électronique, les circuits avec diodes, multiplieur ne sont pas linéaires. Les circuits à AO (cf. prochain chapitre) peuvent être non linéaires si les défauts de l'AO se manifestent : saturation en tension / en courant, slew rate.
On notera qu'en physique, aucun composant n'est linéaire au sens strict du terme. La résistance d'un conducteur dépend de la température, donc du courant qui la traverse (cf. effet Joule). Cet effet est faible, et souvent négligeable en TP.

4.2. Enrichissement du spectre en fréquence

*Un système non linéaire **enrichit le spectre en fréquence** du signal qui lui est soumis :*
la sortie possède des composantes en fréquence qui ne sont pas présentes en entrée.

Exemple : Circuit RC série alimenté par un GBF délivrant une tension sinusoïdale : la sortie aux bornes de C est aussi sinusoïdale et de même pulsation. Qu'observe-t-on si on introduit une diode en série avec le RC ? Par analyse de Fourier du signal de sortie, on observe clairement l'apparition de nouvelles fréquences, conséquence de la non-linéarité de la diode.

5. Application au filtrage : 1er ordre

- ❖ En utilisant les circuits équivalents BF et HF, retrouver comment on réalise un passe-bas avec un RC. Idem pour le passe-haut.

Passe-bas du 1er ordre :

$$H(j\omega) = \frac{H_0}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_c}}$$

Passe-haut du 1er odre :

$$H(j\omega) = \frac{H_0 \times j\dfrac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_c}}$$

- ❖ Etudier ces deux filtres avec la méthode donnée précédemment (Bode asymptotique en gain et phase, Bode complet, fréquences de coupure, bande passante)
- ❖ Donner les critères permettant de réaliser les opérations de dérivation et primitive avec ces filtres
- ❖ Dans les deux cas, déterminer l'expression du signal de sortie pour l'entrée :

$$e(t) = E_0 + E_1\cos(\omega_0 t + \pi/4) + E_2\cos(2\omega_0 t) + E_3\cos(50\omega_0 t)$$

6. Application au filtrage : 2^e ordre

❖ En utilisant les circuits équivalents BF et HF, retrouver comment on réalise un passe-bas avec un RLC série. Idem pour le passe-bande.

Il existe plusieurs notations canoniques pour les 2^e ordre. Il n'est pas nécessaire de les connaître par cœur.

Notions clefs

Savoirs :

- Définition système linéaire stationnaire
- Ecriture canonique des EDiff 1er et 2^e ordre + noms des paramètres associés
- Formule décomposition en série de Fourier + vocabulaire associé
- Formalisme complexe vu en sup
- Critère de non linéarité = enrichissement en fréquences

Savoirs faire :

- Appliquer l'effet d'un filtre à un signal périodique *non-sinusoïdal* en utilisant :
    - l'analyse de Fourier
    - le principe de superposition
- Etudier un filtre, vu en sup : FT, Bode, bande passante, etc.

Animations + manip :

- *animation Fourier*
- *manip de cours enrichissement du spectre (RC + diode)*

ÉLECTRONIQUE

Présentation

Cette partie renforce et complète l'étude des circuits électriques linéaires menée dans la partie « signaux physiques » du programme de première année. Ainsi, les notions de filtrage et d'analyse spectrale sont réinvesties, en particulier dans les activités expérimentales. Le programme de deuxième année ajoute la rétroaction et le bouclage des systèmes linéaires dans le but d'aborder les notions suivantes :

- la stabilité ;
- les oscillateurs ;
- la réalisation de filtres actifs à forte impédance d'entrée pour une association en cascade.

Ces différentes thématiques sont illustrées à l'aide de l'amplificateur linéaire intégré ALI (également appelé amplificateur opérationnel) dont l'étude n'est pas une fin en soi mais un outil permettant des réalisations expérimentales variées.

Par ailleurs, des exemples de manifestations des non linéarités sont abordés à l'occasion de la saturation d'un amplificateur ou de la réalisation d'une fonction mémoire (comparateur à hystérésis).

Afin de compléter l'approche analogique des circuits électriques, un module à vocation expérimentale est consacré au traitement numérique des signaux à travers les sujets suivants :

- l'échantillonnage et le repliement de spectre ;
- le filtrage numérique ;
- les conversions analogique/numérique et numérique/analogique.

Enfin, la problématique de la transmission d'un signal temporel codant une information est abordée dans l'étude et la réalisation d'une modulation, en relation avec la partie du programme consacrée à la propagation des ondes électromagnétiques.

Objectifs de formation

- Passer d'une représentation temporelle à une représentation fréquentielle et réciproquement.
- Analyser la stabilité d'un système linéaire.
- Étudier des manifestations des non linéarités.
- Effectuer quelques opérations de traitement du signal en électronique analogique et numérique.

Le bloc 1 s'intéresse aux propriétés des systèmes linéaires déjà abordés en première année. Les capacités relatives au filtrage et à la décomposition harmonique d'un signal périodique sont révisées sans ajout de nouvelles compétences. Dans le but de faciliter le lien avec le cours de Sciences Industrielles pour l'Ingénieur, la notation symbolique de la fonction de transfert H(p) est utilisée sans faire référence à la transformée de Laplace. L'étude est complétée par une analyse de la stabilité des systèmes du premier et du second ordre en examinant le régime transitoire associé à la relation différentielle.

Notions et contenus	**Capacités exigibles**
1. Stabilité des systèmes linéaires	
Fonction de transfert d'un système entrée-sortie linéaire continu et invariant.	Transposer la fonction de transfert opérationnelle dans les domaines fréquentiel (fonction de transfert harmonique) ou temporel (relation différentielle).
Stabilité.	Discuter la stabilité d'un système d'ordre 1 ou 2 d'après les signes des coefficients de la relation différentielle ou de la fonction de transfert.