Mecaflu – Chap.1 d'intro – Débits et lois de conservation

Intro :
Parce qu'on retrouve ces concepts dans l'étude de tous les phénomènes de transport, ce chapitre d'introduction regroupe les notions de ***débit***, de ***vecteur débit surfacique***, de ***flux***, de ***lois de conservation*** écrites sous forme d'équation ***intégrale*** ou ***locale***.

On aborde ces généralités sur l'exemple du transport de masse par un fluide. Dans des chapitres futurs seront aussi abordés les transports : de charge électrique, d'énergie thermique, de particules, de volume.

Ce n'est pas au programme, mais on pourrait aussi étudier le transport de voiture sur une route (débit autoroutier), le débit de spin up dans un circuit en électronique de spin. Bref, toute grandeur susceptible de se déplacer continûment d'un point de l'espace à un autre peut être étudiée avec les notions abordées ici.

1. Débit d'une quantité à travers une surface

Pour rendre plus concrètes les notions abordées, on prend l'exemple d'un fluide en mouvement (eau d'une rivière, eau dans une canalisation, air soufflé par un ventilateur). On s'intéresse alors au transport de *masse* dans l'espace, associé au mouvement du fluide (on pourrait aussi choisir d'étudier le transport de *volume*, ou *d'énergie*). Dans ce cas, on dit que le fluide ***transporte de la masse***.

1.1. Définition du débit de masse

Définition du débit de masse $\boldsymbol{D_m}$

Le débit de masse est **la masse de fluide qui traverse une surface donnée, par unité de temps** *$(kg.s^{-1})$:*

$$\delta m_{trav} \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{D_m}\, dt$$

Si la surface est orientée, le débit de masse est une grandeur algébrique.
Son signe renseigne alors sur le sens de l'écoulement.
On parle plus fréquemment de « débit massique » (mais appellation trompeuse)

Remarque : Lorsque le sens de l'écoulement est connu, il est préférable de travailler avec des débits de masse définis positifs (donc d'orienter les surfaces dans le sens de l'écoulement).

Relation entre la masse transférée et le débit de masse
La masse totale qui traverse la surface considérée pendant une durée $(t_2 - t_1)$, est donné par : $$m_{trav} = \int_{t_1}^{t_2} D_m \, dt$$

Cette définition se généralise à tous les phénomènes de transport. Si on appelle « truc » la quantité transportée, l'unité du « débit de truc à travers une surface » est en $(truc.s^{-1})$.

1.2. Définition du *vecteur débit surfacique* (*vecteur densité de courant*)

Si le débit n'est pas uniforme sur toute la surface, on se place à l'échelle mésoscopique (i.e. sur une surface élémentaire $\overrightarrow{dS}$) pour définir un ***débit par unité de surface***.
Si l'écoulement est complexe (ex : remous en aval de l'hélice d'un bateau), la direction de l'écoulement peut ne pas être la même en tout point de la surface considérée. C'est pourquoi on incorpore cette information (direction et sens de l'écoulement au niveau de la surface élémentaire) dans la définition du débit à l'échelle mésoscopique.
Ce « vecteur débit surfacique » est plutôt appelé ***vecteur densité de courant***. En général, il est noté $\vec{j}$.

- ✪ Expliquer en quoi l'écriture mathématique du débit élémentaire $\boldsymbol{\delta D_m = \vec{j} \cdot \overrightarrow{dS}}$ est cohérente avec l'information représentée par la direction et le sens du vecteur $\vec{j}$ au niveau de la surface élémentaire $\overrightarrow{dS}$
- ❖ Quelle est l'unité du vecteur débit surfacique ?

Définition du vecteur débit surfacique (vecteur densité de courant)
*Le **vecteur densité de courant**, noté $\vec{j}$, est le débit surfacique défini par la relation :* $$D_m \stackrel{\text{def}}{=} \iint_{M \in Surface} \vec{j}\,(\boldsymbol{M}) \cdot \overrightarrow{dS}$$ *La **direction** et le **sens** du vecteur $\vec{j}(M)$ sont ceux de « l'écoulement » considéré localement en un point M*

Cette définition se généralise à tous les phénomènes de transport. Si on appelle « truc » la quantité transportée, l'unité du « vecteur densité de courant de truc » est en $(truc.s^{-1}.m^{-2})$.

- ❖ En déduire la relation entre D_m et la norme de $\vec{j}$ lorsque ce vecteur est uniforme sur une surface plane

1.3. Vocabulaire mathématique : *Flux d'un champ de vecteur à travers une surface*

Le flux d'un champ vectoriel $\vec{V}$ à travers une surface est l'opérateur F qui agit sur $\vec{V}$ pour donner le scalaire :

$$F(\vec{V}) = \iint_{M \in Surface} \vec{V}\,(M) \cdot \overrightarrow{dS}$$

Ainsi, d'après le paragraphe précédent, tout débit est le flux du vecteur débit surfacique associé.

La réciproque est fausse. Tous les flux ne sont pas nécessairement des débits :
- flux du champ magnétique à travers une surface (vu en sup)
- flux du champ électrique à travers une surface (sera vu cette année)

Ces deux flux ne représentent rien d'observable, ce sont des quantités véritablement abstraites. On les définit car ils interviennent dans des lois physiques fondamentales, mais on ne peut pas se représenter ces quantités à partir de notre expérience courante des phénomènes physiques.

Mise en garde de vocabulaire

Le mot « flux » est souvent utilisé de manière abusive, en lieu et place de « débit ».
Exemple : « On considère un flux de masse à travers telle surface »
au lieu de : « on considère un débit de masse à travers telle surface ».

Cette année, on étudiera les débits suivants :

- débit de particules (chapitre diffusion de particules)
- débit de chaleur (chapitre conduction thermique, cas particulier de débit d'énergie)
- débit d'énergie $\stackrel{\text{def}}{=}$ Puissance ! (électrique, therm(odynam)ique, mécanique, électromagnétique)
- débit de volume
- débit de masse
- débit de charge $\stackrel{\text{def}}{=}$ Intensité du courant électrique ! (chapitre conduction à l'échelle méso)

1.4. Lien entre le vecteur débit surfacique et le vecteur vitesse du fluide

Expression du vecteur débit surfacique de masse en fonction de la vitesse du fluide

Le vecteur densité de courant de masse s'exprime en fonction de la masse volumique et de la vitesse du fluide
$$\boldsymbol{\vec{j} = \rho\,\vec{v}}$$

Démonstration :

❖ Cas simple : On considère une section de conduite rectiligne, tous les champs sont supposés uniformes sur cette section. A l'aide de deux dessins, l'un à t et l'autre à $t + dt$, exprimer la masse qui a traversé la section durant dt en fonction de la vitesse du fluide. En déduire la relation entre débit et vitesse, puis conclure.

✪ Cas champ de vitesse non uniforme : raisonnement idem mais au niveau d'une surface élémentaire

On retiendra ce résultat général : lorsqu'il existe des porteurs de la grandeur « truc », le vecteur débit surfacique de « truc » $\vec{j}$ s'exprime en fonction du « truc » volumique ρ et de la vitesse moyenne des porteurs $\vec{v}$. Presque tous les phénomènes de transport que l'on va étudier sont associés à des porteurs (sauf les phénomènes de diffusion).

2. Lois de conservation

La quasi-totalité des phénomènes de transport seront associés à une ***loi de conservation*** : conservation du nombre de particules (en l'absence de réactions chimiques), conservation de l'énergie (cas transport énergie thermique), conservation de la charge (courant électrique), conservation de la masse (écoulement d'un fluide) et parfois du volume (écoulement d'un fluide incompressible).

Dans cette partie, on va *exprimer* la loi de conservation de la masse dans différentes situations :

- pour des systèmes fermés, puis pour des systèmes ouverts
- à l'échelle macro, puis à l'échelle méso

Tout ce que l'on dira ici pour la masse sera aussi valable pour les autres grandeurs transportées.

2.1. *(Culturel)* Distinction loi universelle – loi phénoménologique

Avant cela, il est important de distinguer en physique (quelque soit le domaine étudié) :

- les lois *universelles* : valables « quelque soit la situation étudiée », ce qui n'empêche pas de pouvoir se retreindre parfois à une sous-classe de phénomènes (exemple : conservation de la masse fausse en physique nucléaire/particules, conservation de l'élément chimique fausse en physique nucléaire)
- les lois *phénoménologiques* : observées dans certaines conditions expérimentales, on ne cherche pas nécessairement à les comprendre (i.e. à les expliquer à partir d'autres lois plus fondamentales)

Exemple de lois universelles :

- loi de la gravitation concernant les corps massifs, *valable quelque soit la nature* du corps
- loi des gaz parfait appliquée aux gaz dilués, *valable quelque soit la nature* du gaz
- principes de la thermo, *valables quelque soit le phénomène étudié* (système ou transformations)
- lois de conservation : énergie, charge, masse, élément chimique
- etc…

Exemple de lois phénoménologiques :

- loi d'Ohm, *pas valable pour tous les matériaux*
- Réponse en traction d'un matériau (i.e. force d'un ressort), *pas valable pour tous les matériaux*
- loi de Fourier et loi de Fick (on les verra dans les prochains chapitres)

Difficile de donner des définitions qui « marchent à tous les coups ». En effet, certaines lois universelles ne le sont pas vraiment car elles ne sont pas valables dans absolument toutes les situations. Mais dans ce cas, on peut généralement donner un critère simple pour savoir quand elles cessent d'être valable (exemple : conservation de l'élément chimique valable tant que les énergies mises en jeu lors des transformations sont très inférieures au MeV). Lorsqu'elles cessent d'être valables, on montre généralement qu'elles ne sont que l'expression déguisée d'une loi plus générale (la conservation de l'élément chimique est une version déguisée de la conservation de l'énergie).

Quant aux lois phénoménologiques, elles sont en général tôt ou tard reliées à des lois universelles de manière plus ou moins directes, plus ou moins dépendantes des conditions expérimentales (exemple : la loi d'ohm peut être démontrée sous certains hypothèses à partir de lois fondamentales et universelles de la physique). La différence importante avec les lois universelles, c'est qu'on ne retrouve pas ces lois phénoménologiques dans d'autres domaines de la physique (on ne rencontre pas la loi d'ohm à chaque fois que l'on étudie des porteurs de charge, alors qu'on a nécessairement recours à la loi universelle de conservation de la charge).

2.2. Distinction système fermé / système ouvert

Définition systèmes fermés / ouverts

Un système ***fermé*** *ne peut pas échanger de matière avec l'extérieur.*
Un système ***ouvert*** *peut* ***échanger de la matière*** *avec l'extérieur.*

❖ On veut étudier l'écoulement d'eau dans une conduite. Il faut pour cela isoler une partie du fluide pour l'étudier, i.e. définir un système. Sur un dessin, essayer de définir un système fermé, puis un système ouvert
Pourquoi se laisser ce choix ?

- toutes les lois fondamentales de la physique sont énoncées pour des systèmes fermés
- expérimentalement, il est généralement plus facile de mesurer l'évolution d'un système ouvert

Le système fermé est avantageux du point de vue théorique. Le système ouvert est avantageux du point de vue expérimental (il peut l'être aussi pour mener des calculs). L'objectif du physicien étant de faire le lien entre la théorie et l'expérience, il est bien obligé d'utiliser ces deux types de systèmes.

2.3. Equation ***intégrale*** de conservation (système ***ouvert macroscopique***)

Il y a deux façons d'écrire les lois de conservation :

- à l'échelle ***macroscopique*** : équation ***intégrale*** (formules sans dérivées spatiales)
- à l'échelle ***mésoscopique*** : équation ***locale*** (formules avec dérivées spatiales)

Lorsqu'on écrit une loi de conservation sous forme intégrale :

- on ne cherche pas à savoir ce qui se passe en tout point
- les équations sont donc indépendantes de la position
- l'équation est plus simple à résoudre
- on peut éviter d'étudier des zones problématiques
- on perd de l'information

On énonce ci-dessous la loi de conservation de la masse pour un système fermé puis pour un système ouvert.

Loi de conservation de la masse pour un système fermé

La masse d'un système fermé est constante au cours du temps : $\boldsymbol{m^*(t) = C^{te}}$

Loi de conservation de la masse pour un système ouvert

Un système ***ouvert*** *voit sa masse varier de la manière suivante pendant une durée élémentaire dt :*

$$dm = \delta m_e - \delta m_s$$

et par unité de temps (Rq : disparition des infinitésimaux) :

$$\boldsymbol{\frac{dm}{dt} = D_{m_e} - D_{m_s}}$$

« L'augmentation algébrique du stock est égale à ce qui entre, moins ce qui sort »

Ici tous les débits sont orientés dans le sens réel de l'écoulement, sinon cette formulation n'est pas intéressante

Comme on fait un bilan d'argent sur un compte bancaire… ici on **effectue un bilan de masse** *grâce à cette loi*

- ✪ Comprendre cette formule signifie d'être capable d'expliquer la signification de chacun des trois termes en s'aidant d'un schéma : le faire dans le cas simple d'une portion de conduite rectiligne

- ✪ On peut aussi formuler cette loi en algébrisant le débit échangé.
  Dans le cas d'un carrefour entre trois conduites, formuler cette loi (mots + math) pour le système ouvert centré sur le carrefour, sous deux formes possibles, selon qu'on oriente les vecteurs $\overrightarrow{dS}$ des interfaces :
  - tous vers l'extérieur
  - tous vers l'intérieur

- ✪ Ce lien entre l'écriture mathématique d'une formule et le sens des flèches sur un schéma vous rappelle-t-il une situation déjà rencontrée en physique ?

- ✪ Lorsqu'on souhaite écrire cette équation de conservation alors que le sens réel de l'écoulement est inconnu, on oriente les vecteurs $\overrightarrow{dS}$ tous dans le même sens, convergent ou divergent. Chacun des débits de l'équation est alors algébrique. Lors d'une application numérique, quelle est la signification physique d'un débit négatif ?

2.4. Interprétation physique de l'opérateur $\boldsymbol{div}(\quad)$: Théorème de flux-divergence (Ostrogradski)

Les significations physiques des équations intégrale et locale sont les mêmes, c'est juste l'écriture qui diffère.

Pour comprendre la signification de l'équation locale (paragraphe suivant), un théorème d'analyse vectorielle est très utile, c'est le Théorème de flux-divergence, ou Théorème d'Ostrogradski (au programme).

Théorème de flux-divergence

Soit un champ vectoriel $\vec{A}$ défini en tout point du volume V considéré :

$$\boldsymbol{\oiint_{S\ autour\ V} \vec{A}\cdot\overrightarrow{dS} = \iiint_{V} div(\vec{A})\, d\tau}$$

- ❖ Citer ce théorème signifie de pouvoir dessiner la surface S et le volume V

Remarques :

- Le symbole « rond » figurant sur l'intégrale double signifie que la ***surface S est une surface fermée*** (i.e. elle délimite un volume)
- Le volume V est justement le ***volume délimité*** par la surface fermée S

2.5. Equation ***locale*** de conservation (système ***ouvert mésoscopique***)

Lorsqu'on écrit une loi de conservation sous forme locale :

- on cherche à savoir ce qui se passe en tout point
- on ne perd aucune information (sauf l'échelle microscopique, mais qui ne nous intéresse pas ici)
- ce sont des équations aux dérivées partielles, où apparaissent des *dérivées spatiales*
- intérêt : permet d'étudier des phénomènes complexes (turbulences dans un fluide)
- parfois impossible à résoudre analytiquement (à la main), recours à l'outil numérique (ordinateur)

Equation locale de conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\vec{j}) = 0$$

- ✪ Démo générale : il suffit d'écrire la loi intégrale de conservation de la masse (termes homogènes à kg) sur un système macro, en orientant nécessairement la surface le délimitant vers l'extérieur
- ✪ Faire apparaître la masse volumique et le vecteur débit surfacique
- ✪ Transformer le flux en intégrale triple grâce à Ostrogradski
- ✪ Formule vraie quel que soit le volume considéré, cqfd

2.6. Etablissement de l'équation locale par un bilan de masse (cas unidimensionnel)

Dans le paragraphe précédent, on a établi l'équation locale de conservation de la masse dans le cas général à l'aide du théorème d'Ostrogradski. Le programme stipule que l'on doit pouvoir établir l'équation locale à partir d'un bilan de masse effectué sur un volume élémentaire, dans le cas unidimensionnel. C'est ce qui vous sera généralement demandé aux concours (peu probable qu'on vous demande d'utiliser Ostrogradski).

- ❖ En considérant une tranche élémentaire d'une conduite rectiligne (système ouvert immobile), tranche repérée sur l'axe horizontal par l'intervalle $[x, x + dx]$, ***effectuer un bilan de masse*** (i.e. appliquer « l'augmentation du stock est égale etc… ») pour en déduire l'équation locale de conservation

2.7. Lois de conservation en régime « stationnaire » (ou « permanent »)

***Définition du régime stationnaire** (ou **permanent**)*

*En régime **stationnaire**, toutes les grandeurs d'un **système ouvert sont indépendantes du temps**.*
*De plus, tous les **champs sont indépendants du temps**.*

Propriété : conservation du débit de masse le long d'un tube de courant
(équations intégrale, puis locale)

Soient deux sections quelconques S_1 et S_2 d'une conduite :

$$D_{m_1} = D_{m_2}$$

$$div(\rho\vec{v}) = 0$$

C'est la loi des nœuds pour le transport de masse !
*On dit aussi que **$\rho\vec{v}$ est à flux conservatif** : son flux est le **même en toute section** d'une conduite.*

La partie consacrée à la mécanique des fluides prolonge à la fois la rubrique « statique des fluides » et la rubrique « thermodynamique » de PCSI. Cet enseignement est conçu comme une initiation de telle sorte que de nombreux concepts (écoulement laminaire, écoulement turbulent, couche limite, vecteur tourbillon, nombre de Reynolds…) sont introduits de manière élémentaire. Toute extension du programme vers les cours spécialisés doit être évitée : par exemple l'approche lagrangienne, la fonction de courant, le potentiel complexe, l'étude locale du champ des vitesses, la relation de Bernoulli pour des écoulements compressibles ou instationnaires, le théorème de Reynolds et le théorème d'Euler sont hors-programme. Enfin la tension superficielle est abordée exclusivement d'un point de vue énergétique et expérimental.

L'apprentissage de la mécanique des fluides contribue à la maîtrise progressive des opérateurs d'analyse vectorielle qui sont utilisés par ailleurs en thermodynamique et en électromagnétisme. Quel que soit l'ordre dans lequel le professeur choisit de présenter ces parties, il convient d'introduire ces opérateurs en insistant sur le contenu physique sous-jacent. Par ailleurs, la recherche de lignes de courants est traitée exclusivement à l'aide de logiciels d'intégration numérique.

Équation locale de conservation de la masse.	Établir cette équation dans le seul cas d'un problème unidimensionnel en géométrie cartésienne. Admettre et utiliser une généralisation en géométrie quelconque utilisant l'opérateur divergence et son expression fournie.

b) divergence	Citer et utiliser le théorème d'Ostrogradski. Exprimer la divergence en coordonnées cartésiennes.