Exercices – Ondes sonores dans les fluides

Exercice 1 : Etablissement de l'équation d'onde en considérant une particule de fluide

Etablir l'équation d'onde via le champ de déplacement
Se confronter à un énoncé de concours

Le fluide est supposé parfait, son mouvement est décrit sans prendre en compte les effets de viscosité et les échanges thermiques à l'intérieur du fluide. Les détentes et compressions locales du fluide sont isentropiques ; V(P) étant le volume du fluide et P sa pression, le coefficient de compressibilité isentropique, constant pour le fluide, s'écrit :

$$\chi_S = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S$$

La propagation des ondes sonores est associée à un écoulement irrotationnel. Les effets de pesanteur ne sont pas pris en compte.

Un tuyau cylindrique horizontal infini de section S_0 constante et d'axe x'x (figure 1) contient un fluide parfait compressible qui, au repos, possède une masse volumique μ_0 et se trouve à la pression P_0 et à la température T_0. Ces grandeurs sont uniformes dans l'espace.

L'équilibre est perturbé par le passage d'une onde acoustique plane qui se propage dans le cylindre suivant la direction Ox. La perturbation unidirectionnelle ne dépend ainsi que de l'abscisse x le long du « tuyau sonore » et du temps t. Dans le milieu perturbé, u(x,t) représente le déplacement à l'instant t du fluide situé au repos à l'abscisse x.

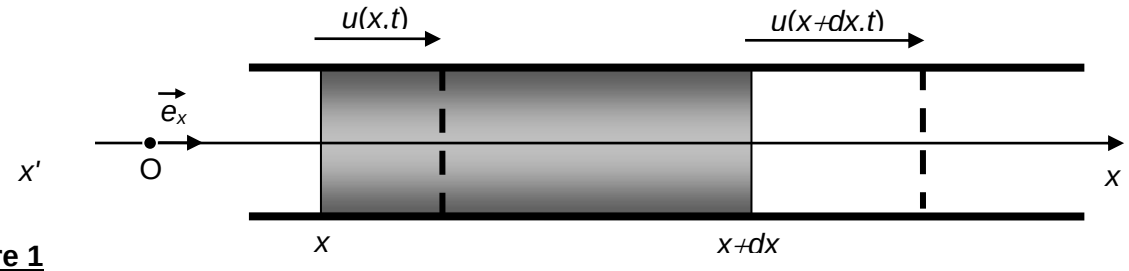

Figure 1

Les champs de pression et de masse volumique dans le fluide dépendent du temps et de l'espace ; ils peuvent s'écrire sous la forme :

$$P(x,t) = P_0 + p(x,t) \qquad |p(x,t)| << P_0$$

$$\mu(x,t) = \mu_0 + \mu_1(x,t) \qquad |\mu_1(x,t)| << \mu_0$$

La vitesse acoustique, ou vitesse vibratoire en un point d'abscisse x, est liée au déplacement du fluide et définie par : $\vec{v}(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\,\vec{e}_x$.

L'étude est effectuée dans le cadre de « l'approximation acoustique » limitée aux mouvements de faible amplitude : le déplacement u(x,t), la vitesse acoustique $v(x,t)$, la pression acoustique (ou surpression) p(x,t) et la variation de masse volumique du fluide $\mu_1(x,t)$ ainsi que leurs dérivées sont des infiniment petits du premier ordre.

La linéarisation consiste à ne garder dans les équations que les termes d'ordre un en p, v et μ_1.

A1. En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la tranche de fluide de volume S_0dx subissant la perturbation, établir à l'ordre un l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\mu_0 \frac{\partial v}{\partial t}$$

A2. Exprimer l'accroissement relatif δ du volume de la tranche de fluide S_0dx entre l'état de repos et l'état perturbé. En déduire la surpression correspondante : $p(x,t) = -\frac{1}{\chi_S}\frac{\partial u}{\partial x}$ et sa dérivée par rapport au temps : $\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = -\frac{1}{\chi_S}\frac{\partial v}{\partial x}$.

A3. Etablir l'équation de propagation relative à la surpression p(x,t) : $\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{C^2}\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial t^2}$.

Donner l'expression de la vitesse de propagation C de l'onde acoustique le long de l'axe Ox en fonction de χ_S et μ_0.

Exercice 2 : Résonateur de diapason

Application des résultats sur les tuyaux sonores

Un diapason est constitué d'un dispositif en métal fixé sur un résonateur en bois de longueur *L*, fermé d'un côté et ouvert de l'autre.
Quelle doit être la longueur de cette cavité pour que le fondamental des vibrations de la partie métallique à 440 Hz fasse entrer en résonance l'air intérieur à la cavité ?

Exercice 3 : Tuyau d'orgue (CCP)

Application directe du complément de cours sur la propagation en tuyau (à faire seul)

Un tuyau d'orgue est assimilable à un tuyau de longueur l = 1,00 m fermé à une extrémité et ouvert à l'autre.
Les pression, température et masse volumique moyenne de l'air (γ = 1,4) contenu dans le tuyau sont : $P_0 = 1{,}013.10^5$ Pa ; T_0 = 290 K ; ρ_0 = 1,22 kg.m^{-3}
On appelle ξ le champ de déplacement (cf. ex1), représentant l'« élongation » d'une particule de fluide. On rappelle que $v(x,t) = \frac{\partial \xi}{\partial t}(x,t)$

1. Déterminer les fréquences f_0 du fondamental et f_1 du premier harmonique.
2. A la fréquence f_1 on a mesuré une amplitude maximale des élongations de l'air égale à a_0 = 1 mm. En déduire l'amplitude maximale correspondante :

- p_{max} pour la surpression ;
- τ_0 pour la température.

Réponses : f_0 = 85,3 Hz ; p_{max} = 668 Pa ; τ_0= 0.55 K.

Exercice 4 : Amortissement par rayonnement (difficile)

Exploiter mathématiquement le fait qu'une onde soit progressive
Raisonnement énergétique : conversion d'énergie mécanique d'un piston en « énergie rayonnée »

On considère un piston de section S et de masse m <u>sans frottements</u> dans un tube horizontal ouvert en x = 0 et se prolongeant à l'infini. L'air contenu dans le tube a une masse volumique ρ et une onde acoustique une célérité C.

A l'instant initial $t = 0$, le piston est lancé de l'abscisse x = 0 avec une vitesse initiale u_0 vers les x croissant ; on note u(t) sa vitesse à un instant t. On constate qu'il s'arrête après avoir parcouru une distance finie que l'on supposera faible *de manière à considérer que l'abscisse du piston reste approximativement nulle*.

Le mouvement du piston engendre une onde progressive plane décrite par la vitesse v(x,t) et la surpression p(x,t). Pour simplifier, on suppose que la pression à gauche du piston reste égale à P_0.

0. L'air initialement au contact du piston reste à son contact à tout instant ultérieur. Traduire mathématiquement cette condition à la limite.

1. Ecrire le principe fondamental de la dynamique appliqué au piston.
2. En exploitant la notion d'impédance, en déduire que : $m\frac{du(t)}{dt} = -\rho C S u(t)$
En déduire l'expression de u(t). Définir un temps caractéristique et commenter ses variations avec m et S.
3. En invoquant le fait que l'onde engendrée est progressive, déduire de l'expression de u(t) celle de v(x,t).
La représenter graphiquement en fonction de x à un instant t = t_0 fixé.
4. Calculer la densité volumique d'énergie de l'onde ; par intégration sur tout le volume occupé par l'onde à un instant t, établir l'expression générale de l'énergie totale de l'onde à un instant t en fonction de m, u0 et u(t). Interpréter physiquement le résultat, et expliquer pourquoi le piston s'arrête malgré l'absence de frottement.

Extrait CCINP PC physique 2023 : Intensité sonore de réverbération

- S'approprier un énoncé exotique traitant des grandeurs énergétiques acoustiques

Le fluide est l'air d'une pièce d'habitation, au centre de laquelle se trouve une source sonore ponctuelle et isotrope, émettant de façon continue un son harmonique. En un point donné de la pièce, on distingue le champ direct dû à l'onde divergente émise par la source qui n'a pas encore rencontré d'obstacles, du champ réverbéré dû à l'ensemble des ondes ayant eu une ou plusieurs réflexion(s) sur les parois et les objets de la pièce. Dans la théorie de l'acousticien américain Sabine, la densité volumique d'énergie sonore du champ réverbéré $\langle e_r \rangle_T$ est supposée uniformément répartie dans toute la pièce à un instant donné. Dans ces conditions, on montre que l'intensité sonore correspondante s'écrit : $I_r = \dfrac{c\langle e_r \rangle_T}{4}$. On notera que I_r et $\langle e_r \rangle_T$ sont des quantités moyennées sur une période T de la source, mais sont susceptibles de varier sur une échelle de temps caractéristique τ beaucoup plus grande.

On néglige dans la suite l'absorption due à l'air, mais pas celle due aux parois et objets de la pièce. On note V le volume de la pièce, S la surface totale des parois et des objets de la pièce, α_m leur coefficient d'absorption moyen, défini comme le rapport entre la puissance sonore absorbée au niveau des parois et des objets et la puissance sonore incidente.
À l'instant $t = 0$, on coupe la source sonore. On se propose d'établir la loi de décroissance $I_r(t)$ de l'intensité sonore du champ réverbéré au cours du temps.

Q32. Exprimer la puissance sonore moyenne $\mathcal{P}_a$ absorbée par les parois et les objets de la pièce en fonction de I_r, α_m et S.
Exprimer de même l'énergie sonore moyenne $\mathcal{E}(t)$ dans la pièce à l'instant t en fonction de son volume V, I_r et c

Q33. À l'aide d'un bilan d'énergie, montrer que l'intensité réverbérée $I_r(t)$ obéit à l'équation différentielle du premier ordre : $\dfrac{\mathrm{d}I_r}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\alpha_m S c}{4V} I_r = 0$.
Donner la loi d'évolution $I_r(t)$. On introduira un temps caractéristique τ et on notera $I_r(t=0) = I_{r,0}$.

On définit le temps de réverbération T_r comme la durée nécessaire pour que le niveau d'intensité sonore L_I dans la pièce décroisse de 60 dB par rapport à son niveau initial, soit : $\Delta L_I = L_I(t = T_r) - L_I(t = 0) = -\ 60\ \mathrm{dB}$. On rappelle que le niveau d'intensité sonore est défini par : $L_I = 10 \log \dfrac{I}{I_0}$ où $I_0 = 10^{-12}\ \mathrm{W \cdot m^{-2}}$ est l'intensité sonore au seuil d'audibilité à 1 000 Hz.

Q34. Exprimer le temps de réverbération T_r en fonction de τ. Vérifier qu'on retrouve la formule semi-numérique de Sabine : $T_r = 0{,}16 \dfrac{V}{\alpha_m S}$, où le rapport V / S est exprimé en m et T_r en s.
On prendra $c = 3{,}4 \cdot 10^2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ (air à la température $T_0 = 293\ \mathrm{K}$ à l'équilibre).