Chap.8 – Mouvements dans un champ de forces centrales conservatives – Application aux planètes et satellites

Intro :
Dans les deux premières parties, on étudie les propriétés générales des mouvements soumis à un Champ de Forces Centrales Conservatives (CFCC).

Le cas général est souvent trop complexe pour être résolu de manière analytique. En se limitant au cas particulier des CFCC newtonien (gravitation par exemple), on va pouvoir établir l'équation de la trajectoire. On retrouvera ainsi les lois de Kepler concernant le mouvement des planètes autour du Soleil, valables aussi pour les satellites en orbite autour de leur planète.

1. Champ de forces centrales conservatives

1.1. Définition d'un CFCC

On peut associer à une grandeur physique un *champ* si cette grandeur est définie en tout point d'une région de l'espace. On distingue les *champs scalaires* associés à des grandeurs physiques scalaires, et les *champs vectoriels* associés à des grandeurs physiques vectorielles (exemples : champ de pesanteur sur Terre ; champ de température dans un fluide).

Un *champ de forces* est un champ vectoriel. On peut par exemple parler de « champ de forces » dans le cas de la gravitation, de la force électrostatique, de la force magnétique.

La définition d'une force centrale a été donnée au chapitre précédent. *Une force est dite centrale s'il existe un point O*, le centre de force, *fixe dans le référentiel galiléen d'étude, et telle que la force est colinéaire au vecteur* $\overrightarrow{OM}$ *à tout instant.*

La définition d'une force conservative a été donnée en première période. *Une force est dite conservative si son travail est indépendant du chemin suivi. On peut alors définir une énergie potentielle associée à cette force.*

1.2. Propriétés d'un CFCC

Au chapitre précédent, on a montré qu'un mouvement à force central est nécessairement plan. Dans le cas d'un CFCC, le mouvement est donc à deux degrés de liberté : on peut repérer la position du point matériel en coordonnées polaires.

On retiendra les propriétés suivantes d'un champ de force *centrale conservative* :

- la force ne dépend que de la coordonnée radiale du vecteur position (du point matériel)
- la force dérive d'une énergie potentielle, fonction uniquement de la coordonnée radiale

$$\vec{F} = F(r)\overrightarrow{e_r}$$
$$F(r) = -\frac{dE_p}{dr}(r)$$

1.3. Force attractive ou répulsive

- Déterminer le signe de $\frac{dE_p}{dr}$ dans le cas d'une force attractive. Puis dans le cas d'une force répulsive.

1.4. Champs de force newtoniens – Force de gravitation et force électrostatique

Par définition, un champ de force newtonien est *un CFCC « en* $\frac{1}{r^2}$ ».
Les deux exemples que l'on étudiera dans ce cours sont :

- la force de gravitation
- la force électrostatique (ou « interaction coulombienne »)

Force de gravitation :

Deux points matériels M_1 et M_2, de masses respectives m_1 et m_2 et distants de r, exercent l'un sur l'autre une force attractive, appelée *force de gravitation*. En considérons M_2 comme le système, alors la force de gravitation exercée par M_1 sur M_2 est donnée par :

$$\vec{F}_{M_1\to M_2} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\overrightarrow{e_r}$$

où $G = 6{,}67.10^{-11}\ N.m^2.kg^{-2}$ est une constante universelle.

Remarque : Un schéma est indispensable pour définir le vecteur unitaire $\overrightarrow{e_r} = \overrightarrow{e_{12}}$.

Remarque : Les masses apparaissant dans la loi de gravitation pourraient être a priori différentes de la masse des points matériels, définies à partir de la RFD. C'est la distinction entre les deux concepts de masse évoquée en première période : la *masse inerte* (RFD) et la *masse pesante* (gravitation). L'expérience montre avec une très grande précision que la masse inerte et la masse pesante sont égales. D'un point de vue théorique, cette égalité est posée en tant que principe. C'est un aspect du principe d'équivalence fondateur de la relativité générale.

- Etablir l'expression de l'énergie potentielle associée à la gravitation.

Force électrostatique:

L'expérience montre qu'il existe des points matériels sensibles à une force dite électrostatique. Pour comprendre ces observations, on est amené à définir pour ces points matériels une nouvelle grandeur physique scalaire, *la charge électrique*, qui peut être positive ou négative, et dont la valeur absolue est un multiple entier de *la charge élémentaire* : $e = 1{,}6\ 10^{-19}\ C$.

Deux points matériels possédant des charges de même signe se repoussent ; deux points matériels possédant des charges de signe opposé s'attirent. L'expression de la force électrostatique est donnée par la loi de Coulomb.

Deux points matériels M_1 et M_2, de charges respectives q_1 et q_2 et distants de r, exercent l'un sur l'autre une force appelée *force électrostatique*. En considérons M_2 comme le système, alors la force électrostatique exercée par M_1 sur M_2 est donnée par :

$$\vec{F}_{M_1\to M_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\overrightarrow{e_r}$$

où $\varepsilon_0 = 8{,}85\ 10^{-12}\ F.m^{-1}$ est la permittivité du vide.

Remarque : Un schéma est indispensable pour définir le vecteur unitaire $\overrightarrow{e_r} = \overrightarrow{e_{12}}$.

- Etablir l'expression de l'énergie potentielle associée à la force électrostatique.

Généralement, on fixe la constante d'intégration en prenant ***l'énergie potentielle nulle à l'infini***.

C'est ce que l'on fera toujours par la suite.

Comparaison des ordres de grandeur de ces deux interactions fondamentales :

On retiendra que :

- la matière étant globalement neutre électriquement, seule la gravitation joue un rôle aux grandes échelles spatiales (échelle cosmique)
- à l'échelle microscopique (échelle de l'atome par exemple), la force électrostatique est très nettement prépondérante sur la gravitation

2. Lois générales de conservation dans le cas des CFCC

2.1. Conservation du moment cinétique

On a déjà vu au chapitre précédent que dans le cas d'un mouvement dans un champ de force centrale le moment cinétique *par rapport au centre de force* se conserve. On en a déduit deux propriétés importantes.

> *Dans le cas d'un CFCC de centre O, le moment cinétique* $\overrightarrow{L_O}$ ***se conserve.***
> *Le mouvement appartient* ***au plan orthogonal à*** $\overrightarrow{L_O}$***, et contenant O.***
> *Le point matériel vérifie* ***la loi des aires****.*

- Exprimer la norme du moment cinétique en fonction des coordonnées polaires.

Cette relation est *une intégrale première du mouvement* : une quantité cinématique ne dépendant que des dérivées temporelles du premier ordre se conserve dans le temps. Comme d'habitude, la valeur de ce moment cinétique constant est fixée *par les conditions initiales*.

On peut déduire de cette expression que :
- le signe de $\dot{\theta}$ est constant : le point M *évolue toujours dans le même sens* autour du centre de force
- plus la distance du point M au centre de force diminue, plus la vitesse angulaire augmente

2.2. Conservation de l'énergie mécanique

> *La force étant conservative, on peut lui associer une* ***énergie potentielle****.*
> *D'après le TEM,* ***l'énergie mécanique se conserve au cours du mouvement****.*

- Etablir l'expression de l'énergie mécanique en fonction des coordonnées polaires.

Contrairement aux situations étudiées en première période (mouvements à un degré de liberté), le mouvement est ici à deux degrés de liberté. A priori, on ne peut donc pas discuter aussi simplement du mouvement.

> Pourtant, il est possible ***de se ramener à l'étude d'un mouvement à un degré de liberté*** en :
>
> - ne considérant que ***le mouvement radial*** (selon $\overrightarrow{e_r}$)
> - **en « faisant disparaître »** $\dot{\theta}$ en le remplaçant par la norme du moment cinétique $\left\|\overrightarrow{L_O}\right\|$ (constante !)
> - en définissant une ***énergie potentielle effective***

2.3. Etude du mouvement radial – Energie potentielle effective

- En utilisant l'expression de la norme du moment cinétique en fonction des coordonnées, exprimer l'énergie mécanique en fonction de la coordonnée radiale (r) uniquement.

- Interpréter physiquement l'expression obtenue en définissant :
  - *l'énergie cinétique radiale*
  - *une énergie potentielle effective*

Discussion graphique dans le cas particulier d'un CFCC newtonien *(cas attractif et cas répulsif)*

- Tracer l'allure de $E_{p_{eff}}(r)$ grâce à une étude asymptotique rapide

- L'énergie cinétique radiale *étant toujours positive*, repérer les bornes délimitant le mouvement radial pour différentes valeurs de l'énergie mécanique (i.e. pour différentes conditions initiales)

- Pour quelles valeurs de l'énergie mécanique peut-on parler ***d'état lié*** et ***d'état de diffusion*** ?

3. <u>Equation de la trajectoire dans le cas d'un CFCC *newtonien*</u>

Après avoir établi les propriétés générales des mouvements dans un CFCC, on va établir l'équation $r(\theta)$ de la trajectoire dans le cas particuliers des CFCC newtoniens.

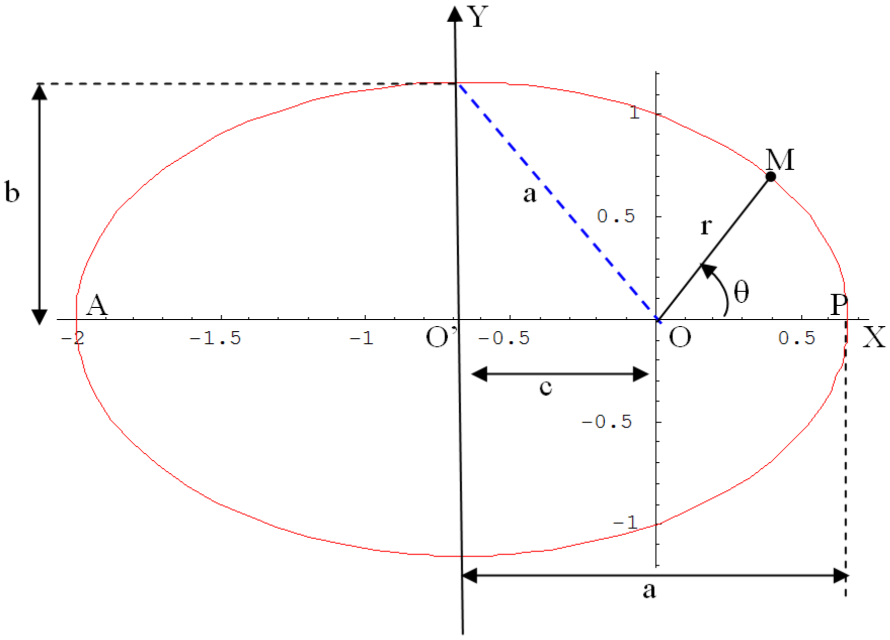
Il existe plusieurs méthodes de résolution, aucune n'est exigible au programme de PCSI. Il s'agit simplement de savoir refaire la démonstration en étant guidé par un énoncé. Les deux méthodes que l'on va voir nécessitent au préalable d'établir les formules de Binet (non exigibles).

3.1. <u>Quelques propriétés des coniques</u>

(Aucune propriété des coniques n'est exigible au programme de physique de PCSI)

Les coniques sont une famille de courbes planes dont on va avoir particulièrement besoin dans la suite de ce chapitre. Elles sont constituées d'une famille de courbes fermées et deux familles de courbes ouvertes :

- *les ellipses* (le cercle est une ellipse particulière)
- *les paraboles*
- *les hyperboles*



<u>L' ellipse</u>

- *O'* est le centre de l'ellipse
- *O* est un des foyers
- *OO'* est l'axe focal
- *A* et *P* sont les sommets
- *P* est le péricentre
- *A* est l'apocentre
- *a* est le demi grand axe
- *b* est le demi petit axe
- *c* est la demi distance interfocale
- $a^2 = b^2 + c^2$
- $e = \frac{c}{a}$ excentricité (*e = 0* : cercle)
- $Aire = \pi ab$
- Equation en coordonnées polaires, si l'axe polaire est confondu avec l'axe focal :

$$\boxed{r = \frac{p}{1+e\cos\theta} \quad avec \quad e < 1}$$

- p est le paramètre de l'ellipse ($p > 0$)
- $p = \frac{b^2}{a}$

<u>L'hyperbole</u>

- deux branches, l'une de type « attractive », l'autre de type « répulsive »
- Equation en coordonnées polaires pour le type « attractive » : idem ellipse avec $e > 1$
- Equation en coordonnées polaires pour le type « répulsive » :

$$\boxed{r = \frac{p}{-1+e\cos\theta} \quad avec \quad e > 1}$$

<u>La parabole</u>

- contrairement à l'hyperbole, elle n'admet pas d'asymptote affine quand $r \to \infty$
- même équation que l'ellipse en coordonnées polaires, mais *avec* $e = 1$
- correspond à la transition entre l'ellipse et l'hyperbole (branche « attractive »)

3.2. Préalables : Formules de Binet

On va établir l'équation de la trajectoire par deux méthodes, en intégrant soit :
- l'ED donnée par la conservation de l'énergie mécanique
- l'ED donnée par la RFD (à établir)

Il est clair que ces deux ED ne sont pas directement intégrables. L'idée est donc d'exprimer ces ED de manière à pouvoir les intégrer facilement. C'est l'objectif des formules de Binet, qui consistent à :
- introduire la norme du moment cinétique $\|\overrightarrow{L_O}\|$ pour éliminer la fonction $\theta(t)$
- remplacer la fonction $r(t)$ par la fonction $r(\theta)$
- procéder à un changement de variables $u(\theta) = \frac{1}{r(\theta)}$

- Etablir la première formule de Binet, donnant v^2 en fonction de $\|\overrightarrow{L_O}\|$ et $u(\theta)$
- Etablir la deuxième formule de binet, donnant $\vec{a}$ en fonction de $\|\overrightarrow{L_O}\|$ et $u(\theta)$

3.3. Etablissement de l'ED à l'aide des formules de Binet

Conservation de l'énergie mécanique *(méthode 1)*
- Montrer que l'énergie mécanique est indépendante de θ
- A l'aide de la première formule de Binet, en déduire l'ED vérifiée par $u(\theta)$

RFD *(méthode 2)*
- A l'aide de la deuxième formule de binet, établir l'ED vérifiée par $u(\theta)$

3.4. Equation de la trajectoire et discussion du mouvement dans le cas **attractif**

- Résoudre l'ED obtenue. En déduire l'équation de la trajectoire $r(\theta)$.

Les trajectoires sont des coniques, dont le centre de force est un des foyers :
- *e = 0 : cercle*
- *e < 1 : ellipse*
- *e = 1 : parabole*
- *e > 1 : hyperbole (branche « attractive »)*

3.5. Equation de la trajectoire et discussion du mouvement dans le cas **répulsif**

- Résoudre l'ED obtenue. En déduire l'équation de la trajectoire $r(\theta)$.

La trajectoire est une hyperbole (branche « répulsive »), dont le centre de force est le foyer.

3.6. *(Complément)* Relation entre l'énergie mécanique et l'excentricité de la trajectoire

On a vu que le signe de l'énergie mécanique donne un critère pour repérer les états liés des états de diffusion (étude graphique du mouvement radial). On a vu aussi que la valeur de l'excentricité de la conique permet de distinguer les coniques fermées (état lié) des coniques ouvertes (état de diffusion).
Il doit donc exister une expression reliant l'énergie mécanique à l'excentricité de la conique. On obtient cette relation en réinjectant la solution $u(\theta)$ dans l'expression de l'énergie mécanique établie grâce à la première formule de Binet. Avec $K/r^2\overrightarrow{e_r}$ la FCC, et une énergie potentielle nulle à l'infini, on trouve :

$$E_m = -\frac{|K|}{2p}(1 - e^2)$$

On vérifie que cette expression est compatible avec la nature de la trajectoire déduite des deux critères : énergie mécanique et excentricité.

4. Application : Etude du mouvement des planètes et des satellites

L'étude générale des CFCC, puis l'équation de la trajectoire établie dans le cas des CFCC newtonien, s'applique à l'étude du mouvement des planètes et des satellites, moyennant certaines approximations préalables. Cette étude théorique va nous permettre de retrouver par le calcul les lois expérimentales de Kepler.

Remarque : Ce que l'on va établir pour l'orbite d'une planète autour du Soleil est valable pour l'orbite d'un satellite autour de sa planète.

On notera que dans le cas du mouvement des planètes autour du Soleil, ***le référentiel d'étude est le référentiel héliocentrique***, *dont l'origine se situe au centre du Soleil et dont les axes du repère associé pointent vers des étoiles fixes (quasiment identique au référentiel de Copernic, centré sur le barycentre du système solaire).*

4.1. Enoncé des 3 lois expérimentales de Kepler

1. Les orbites des planètes sont des ellipses dont le Soleil est l'un des foyers.
2. Le rayon vecteur issu du Soleil balaie des aires égales pendant des intervalles de temps égaux.
3. Le rapport entre le carré de la période T de révolution de la planète
   et le cube du demi grand axe de sa trajectoire est *indépendant de la planète considérée* : $\frac{T^2}{a^3} = C^{te}$

4.2. Hypothèses de l'étude théorique

On peut retrouver ces lois moyennant quelques hypothèses raisonnables, sur lesquelles on aura l'occasion de revenir dans les chapitres ultérieurs.

- On suppose le Soleil et les planètes à symétrie sphérique. On peut alors considérer que chacun de ces astres est assimilable à un point matériel de même masse, et situé au centre de l'astre.

- Lors de l'étude du mouvement d'une planète, on néglige l'influence des forces de gravitation des autres planètes, en ne tenant compte que de la force exercée par le Soleil sur la planète étudiée.

- La masse des planètes étant très faibles devant celle du Soleil, on suppose le Soleil immobile dans le référentiel de Copernic (origine prise au barycentre du système solaire).

Moyennant ces hypothèses, les calculs effectués précédemment dans le cas des CFCC newtonien attractif permettent de retrouver les deux premières lois de Kepler.

La 3ème loi de Kepler nécessite quelques calculs supplémentaires. Avant de la démontrer dans le cas général des trajectoires elliptiques, on va démontrer un certain nombre de propriétés des trajectoires circulaires.

4.3. Etude complète dans le cas de trajectoires circulaires

(Toutes ces propriétés doivent pouvoir être établies sans énoncé)

En supposant que la trajectoire de la planète est circulaire, de rayon r_0 :

- En appliquant la RFD :
  - établir que le mouvement est uniforme
  - établir la relation entre la norme de la vitesse et r_0
- Etablir la relation entre E_m et r_0
- Etablir la relation entre E_m et E_p
- Etablir la 3ème loi de Kepler. En observant le mouvement d'une planète quelconque, que peut-on déduire à propos du Soleil ?

On notera que l'on peut aussi montrer que le mouvement est uniforme en utilisant la conservation du moment cinétique.

4.4. Etude des trajectoires elliptiques

Relation entre l'énergie mécanique et le demi grand axe

A partir de l'expression de E_m en fonction de *e*, et en exprimant *r* à l'apocentre et au péricentre, on trouve :

$$E_m = \frac{K}{2a}$$

3ème loi de Kepler

A partir de la loi des aires et des relations entre les paramètres de l'ellipse, on trouve :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S}$$

Le rapport $\frac{T^2}{a^3}$ est indépendant de la masse de la planète considérée. Il ne dépend que de la masse du Soleil et de la constante de gravitation.

<u>Remarque</u> *:* Connaissant *G*, il suffit d'observer le mouvement d'une planète pour en déduire une mesure de la *masse du Soleil* ! Il suffit aussi d'observer le mouvement d'un satellite pour en déduire une mesure de la *masse de sa planète*.

- Connaissant la distance Terre – Soleil (trajectoire quasi-circulaire), en déduire la masse du Soleil.

<u>Remarque</u> *:* Ces mesures de masse ne sont possibles que si l'on connaît *G*. Ce n'est pas Newton qui a « inventé / calculé » la valeur de *G*. Newton a introduit cette constante pour signifier que la force de gravitation est proportionnelle au produit des masse divisé par le carré de la distance.
Alors comment *G* a-t-il été mesuré ? Il est clair que ce n'est pas grâce à l'observation du mouvement des planètes et des satellites. C'est le physicien britannique *Cavendish* qui a effectué en 1798 une mesure en laboratoire de la force de gravitation existant entre deux masses connues. Il en déduisit *G*, et surtout... la première mesure de la masse de la Terre !

On retiendra que :

On retrouve ces deux relations dans le cas général elliptique à partir du cas circulaire (facile à calculer), ***en remplaçant le rayon de l'orbite circulaire par le demi grand axe de l'ellipse.***

5. Mise en orbite des satellites terrestres

Le mouvement des satellites autour de leur planète s'étudie de manière identique à celui des planètes autour du Soleil.

On notera que dans le cas du mouvement des satellites terrestres, ***le référentiel d'étude est le référentiel <u>géocentrique</u>****, dont l'origine se situe au centre de la Terre et dont les axes du repère associé sont fixes dans le référentiel de Copernic (<u>on voit la Terre tournée sur elle-même dans ce référentiel</u>).*

Dans cette partie, on s'intéresse ici plus particulièrement à la mise en orbite des satellites terrestres.

5.1. « Fenêtre de lancement »

Intuitivement, si la vitesse communiquée au satellite lors de son lancement est trop faible, alors le satellite retombe sur Terre (comme lorsqu'on lance une pierre en l'air). D'autre part, si la vitesse communiquée initialement au satellite est trop grande, alors le satellite est libéré de l'attraction terrestre : il s'éloigne indéfiniment de la Terre (état libre).

- En considérant que le satellite est lancé depuis le sol avec une vitesse initiale v_0, exprimer l'énergie mécanique du satellite. Retrouver les propriétés énoncées ci-dessus.

Il apparaît donc clairement qu'il existe une « fenêtre de lancement » : la vitesse initiale communiquée au satellite doit être comprise dans un certain intervalle $[v_{min}; v_{max}]$. Nous allons calculer ces vitesse limites, respectivement appelées *1ère vitesse cosmique* et *2ème vitesse cosmique*.

5.2. Préalable : expression approchée de la masse de la Terre M_T en fonction de g et R_T

En exercice, la masse de la Terre peut ou non être donnée par l'énoncé. Il sera parfois demandé de la calculer de manière approchée à partir du champ de pesanteur, du rayon de la Terre et de la constante de gravitation.

On verra dans un chapitre ultérieur la différence entre gravitation et pesanteur. On admet ici qu'on peut confondre *en première approximation* la force de gravitation et la force de pesanteur, ***lorsque l'on se situe proche de la surface de la Terre.***

- En oubliant momentanément le satellite, et en considérant la force exercée par la Terre sur un objet placé à sa surface, déduire de l'égalité entre pesanteur et gravitation l'expression de M_T en fonction de g, G et R_T le rayon de la Terre
- Effectuer l'application numérique avec $R_T = 6400\ km$

5.3. 1ère vitesse cosmique : vitesse minimale de mise en orbite

La *première vitesse cosmique* est la *vitesse* *minimale* *à communiquer au satellite pour le mettre en orbite*.

D'après les résultats établis dans ce chapitre, la trajectoire du satellite, juste après le lancement, est une conique (ellipse, parabole ou hyperbole) dont le centre de la Terre est un foyer. Si cette trajectoire coupe la surface de la Terre, cela signifie que le satellite retombe sur Terre.

On va donc calculer la vitesse initiale correspondant à l'orbite la plus basse ne coupant pas la surface de la Terre.

- Identifier cette orbite.
- Etablir l'expression de la 1ère vitesse cosmique, et faire l'application numérique.

5.4. 2ème vitesse cosmique : vitesse maximale de mise en orbite

La *deuxième vitesse cosmique* est la *vitesse* *maximale* *à ne pas dépasser pour que le satellite soit mis en orbite*.

- Etablir l'expression de la 2ème vitesse cosmique. Faire l'application numérique.

Remarque : On notera que les conditions de mise en orbite ne dépendent pas de la direction de lancement du satellite. Cette propriété est valable car on a négligé les frottements de l'air.

Notions clefs

Savoirs :

- Définition et propriétés d'un CFCC.
- Définition CFCC newtonien. Exemples de la gravitation et de l'interaction de Coulomb
- Conservation du moment cinétique + conséquences
- Conservation de E_m + *utilité* de $E_{p_{eff}}$ pour discuter graphiquement du mouvement *radial*
- Lois de Kepler (expression mathématique de la 3$^{\text{ème}}$ loi par cœur)
- Les deux relations établies dans le cas des trajectoires elliptiques *se retrouvent à partir* du cas circulaire
- Définition des vitesses cosmiques
- (Equation en coordonnées polaires des différentes coniques)

Savoirs faire :

- Retrouver l'expression du moment cinétique $\overrightarrow{L_O}$ en coordonnées polaires
- Démontrer les lois générales de conservation dans le cas d'un CFCC
- Etablir l'expression de $E_{p_{eff}}$ + discuter graphiquement du mouvement radial
- Etablir l'équation de la trajectoire dans le cas d'un CFCC newtonien (en suivant un énoncé)
- Dans le cas d'une trajectoire circulaire, redémontrer toutes les relations établies en cours (sans énoncé)
- Exprimer approximativement M_T en fonction de g, G et R_T en assimilant la pesanteur à la gravitation
- Déterminer les vitesses cosmiques (sans énoncé)