Exercices – Diffusion de particules

Exercice 1 : Diffusion de neutrons, avec terme de création

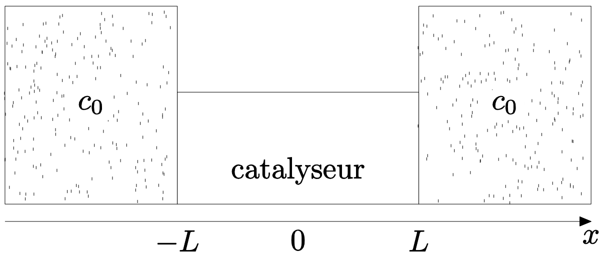
On étudie la diffusion unidirectionnelle de neutrons dans un barreau de plutonium cylindrique d'axe Ox et de section droite d'aire S, s'étendant entre les abscisses x = 0 et x = L. On note n(M,t) le nombre de neutrons par unité de volume. Cette diffusion satisfait à la loi de Fick, avec un coefficient de diffusion D = 22 $m^2.s^{-1}$.

D'autre part, du fait de réactions nucléaires entre les neutrons et la matière, des neutrons sont produits : pendant une durée dt, dans un élément de volume dτ(M), il apparaît δN_p = K.n(M,t)dτ(M)dt neutrons, où K = 3,5 10^4 s^{-1} est une constante positive caractéristique des réactions nucléaires.

On admettra en première approximation que *n* doit s'annuler à tout instant aux extrémités du cylindre (x = 0 et x = L). En revanche, on supposera que *n(x,t)* ne *s'annule pas à l'intérieur du cylindre*.

1) Etablir l'équation de diffusion dans le cylindre.
2) Déterminer *n(x)* à une constante multiplicative près en régime stationnaire. Montrer que ce régime n'est possible que pour une valeur particulière L_s de la longueur du barreau, et calculer L_s.
3) En régime quelconque, on cherche une solution de la forme *n(x,t) = h(x)exp(-t/τ)*. Déterminer *h(x)* et *τ*. En déduire que *n(x,t)* diverge si L est supérieure à L_s.

Exercice 2 : Diffusion dans un catalyseur



On étudie une réaction chimique du type $A \to B$ s'effectuant en présence d'un catalyseur. Le catalyseur est enfermé dans un cylindre de longueur $2L$ de surface S. Il est au contact de deux réservoirs de molécules A qui maintiennent aux extrémités une concentration constante c_0. La diffusion des molécules A dans le catalyseur est unidimensionnelle et suit la loi de Fick avec un coefficient de diffusion D. Le régime stationnaire est supposé atteint et on note $c(x)$ leur concentration en un point x du catalyseur. La réaction chimique étant supposée d'ordre 1, dans un volume dV du catalyseur situé en x, il disparaît une quantité $\delta N_A = c(x)dV\frac{dt}{\tau}$ molécules A dans une durée dt, τ désignant un temps caractéristique lié à la réaction.

1°) Etablir l'équation de diffusion vérifiée par c et déterminer sa solution vérifiant les conditions aux limites. On posera $\alpha = \frac{1}{\sqrt{D\tau}}$.

2°) Les molécules B produites dans le catalyseur diffusent avec un coefficient D'. Elles sont prélevées aux extrémités du catalyseur de sorte que leur concentration peut y être considérée nulle.

Établir l'équation différentielle vérifiée par la concentration $c'(x)$ de molécules B dans le catalyseur Déterminer l'expression de $c'(x)$ et en déduire le flux de molécules B aux extrémités du catalyseur.

Réponses : $c(x) = c_0\,\frac{\operatorname{ch}\alpha x}{\operatorname{ch}\alpha L}\,c'(x) = c_0\,\frac{D}{D'}\left[1 - \frac{\cosh\alpha x}{\cosh\alpha L}\right]$

Exercice 2 : Diffusion en géométrie sphérique, en régime stationnaire

Des particules diffusent dans un milieu infini avec un coefficient D ; ces particules sont créées dans une boule de centre O et de rayon R_0 à raison de q_0 particules par unité de temps et de volume. Le régime est stationnaire.

On suppose que le phénomène de diffusion est aussi à symétrie sphérique : tous les champs sont indépendants des coordonnées θ et φ, et tous les champs vectoriels sont dirigés radialement. On note donc n(r,t) le nombre de particules par unité de volume au point M distant de r du point O.

1) Déterminer le vecteur densité de courant de particules pour $r > R_0$ puis pour $r < R_0$.
2) En déduire l'expression de n(r) pour tout r (on considérera que $n(r) \to 0$ lorsque $r \to \infty$).
3) Retrouver ce résultat grâce à l'équation de la diffusion.

Exercice 3 : Diffusion en géométrie cylindrique, en régime stationnaire

Des particules diffusent dans un milieu infini avec un coefficient D ; ces particules sont créées dans un cylindre vertical infiniment haut, d'axe (Oz) et de rayon R_0 à raison de q_0 particules par unité de temps et de volume. Le régime est stationnaire.

On suppose que le phénomène de diffusion est aussi à symétrie cylindrique : tous les champs sont indépendants des coordonnées θ et z, et tous les champs vectoriels sont dirigés radialement. On note donc n(r,t) le nombre de particules par unité de volume au point M distant de r du point O.

1) Déterminer le vecteur densité de courant de particules pour $r > R_0$ puis pour $r < R_0$.
2) En déduire l'expression de n(r) pour tout r (on considérera que $n(r) \to 0$ lorsque $r \to \infty$).
3) Retrouver ce résultat grâce à l'équation de la diffusion.

Exercice 5 : Diffusion de molécules sous l'action d'un gradient de concentration

Un récipient contient un liquide homogène, de masse volumique ρ, dans lequel on ajoute des macromolécules insolubles de masse volumique ρ_0 ($\rho_0 > \rho$), supposées de forme sphérique.
La solution obtenue est maintenue homogène jusqu'à la date t = 0. A partir de cet instant elle est abandonnée à elle-même et, sous l'action des forces de pesanteur, les macromolécules se déplacent vers le fond du récipient. Nous supposerons un mouvement unidirectionnel vertical et les macromolécules soumises, entre autres, à une force de type visqueux : $\vec{F} = -\lambda.\vec{v}$ avec λ une constante positive).
a) Donner l'équation différentielle du mouvement d'une macromolécule (on considérera un axe Oz vertical ascendant, l'origine 0 coïncidant avec le fond du récipient).
b) Montrer que ces particules atteignent une vitesse limite v_{lim} que l'on exprimera en fonction de m, g, λ, ρ et ρ_0.
c) La vitesse limite étant supposée atteinte très rapidement, donner l'expression de la densité du flux d'entraînement molaire $\vec{j}_e$ des macromolécules à la côte z ; où leur concentration molaire est c(z) ($\vec{j}_e$ correspondant à la quantité de macromolécules (en moles) traversant une surface unité horizontale pendant l'unité de durée).
d) La sédimentation ayant entraîné une inhomogénéité de la solution, le phénomène de diffusion dans le sens ascendant apparaît. On admet que la densité de flux de diffusion molaire $\vec{j}_d$ des particules est donnée par la loi de Fick : $\vec{j} = -D\dfrac{\partial c}{\partial z}\vec{e}_z$. Déterminer, en régime stationnaire, la loi de variation de c avec z.
e) Des mesures optiques montrent que, à 25° C, $\dfrac{c(z=0)}{c(z=2cm)} = 2$. Quelle est la masse molaire des macromolécules et la valeur de leur rayon ?

On donne : $D = \dfrac{k_B.T}{\lambda}$ $\rho = 1000$ kg.m^{-3} et $\rho_0 = 1250$ kg.m^{-3}