Questionnaire de révision de mécanique PCSI

1) Repère $\left(O ; \underbrace{\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z}}_{\text{BOND}}\right)$. Sert à repérer des posit°.

origine

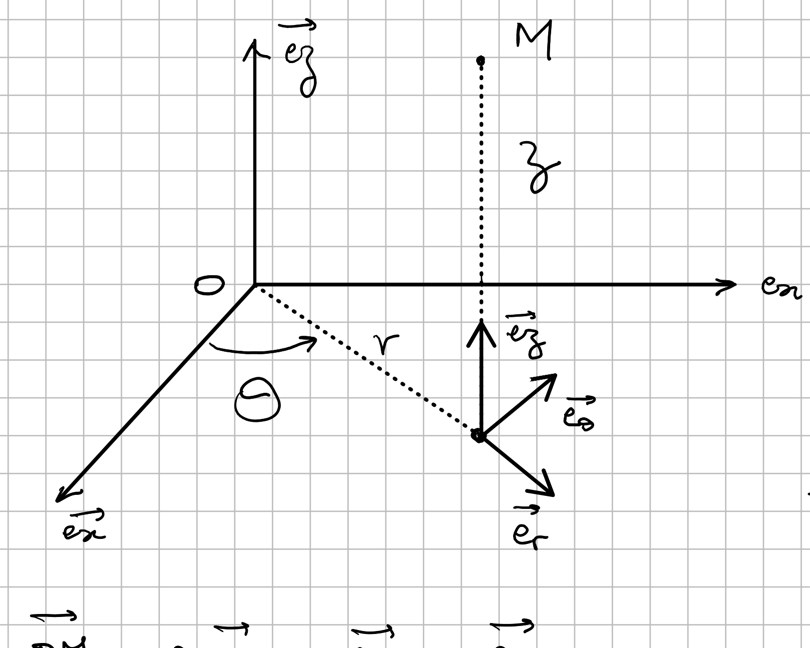
Sert aussi à décomposer d'autres vecteurs (forces, vitesse...)

2) Référentiel : repère de référence. Repère depuis lequel on observe / calcule le mouvement.
Exple de repère qui n'est pas un référentiel : repère polaire pour étudier pendule simple.

3) Hélio : centre Soleil
Copernic : centre gravité syst. solaire } BOND vers étoiles fixes
Géoc$^{\text{que}}$: centre Terre

Réf. terrestre : origine et BOND fixe /$^{\text{r}}$ sol.

4)



5) Coordonnées :
(r, θ, z)
Composantes de $\vec{OM}$:

$$\vec{OM} = \underbrace{r\,\vec{e_r}}_{} + \underbrace{z\,\vec{e_z}}_{}$$

NB : θ est "caché" dans $\vec{e_r}$.

6) $\vec{OM} = x\,\vec{e_x} + y\,\vec{e_y} + z\,\vec{e_z}$

$\vec{v} = \dfrac{d\vec{OM}}{dt} = \dot{x}\,\vec{e_x} + \dot{y}\,\vec{e_y} + \dot{z}\,\vec{e_z}$

$\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{x}\,\vec{e_x} + \ddot{y}\,\vec{e_y} + \ddot{z}\,\vec{e_z}$

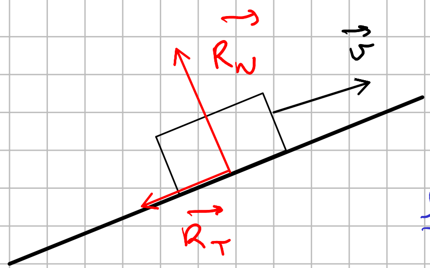
7) $\vec{OM} = r\,\vec{e_r} + z\,\vec{e_z}$ $\qquad \vec{v} = \left(\dot r\,\vec{e_r} + r\dot\theta\,\vec{e_\theta}\right) + \dot z\,\vec{e_z}$

$$\vec{a} = \left(\ddot r\,\vec{e_r} + \dot r\dot\theta\,\vec{e_\theta}\right) + \left(\left[\dot r\dot\theta\,\vec{e_\theta} + r\ddot\theta\,\vec{e_\theta}\right] - r\dot\theta^2\,\vec{e_r}\right) + \ddot z\,\vec{e_z}$$

$$= \left(\ddot r - r\dot\theta^2\right)\vec{e_r} + \left(r\ddot\theta + 2\dot r\dot\theta\right)\vec{e_\theta} + \ddot z\,\vec{e_z}.$$

8) $\vec{OM} = R\,\vec{e_r}$ $\qquad \vec{v} = R\dot\theta\,\vec{e_\theta}$ $\qquad \vec{a} = R\ddot\theta\,\vec{e_\theta} - R\dot\theta^2\,\vec{e_r}$

9)



$\vec{R} = \vec{R_T} + \vec{R_N}$

frott solides, sens opposé au mvt

↳ empêche le corps de pénétrer

<u>En mouvement</u> : $\|\vec{R_T}\| = f\,\|\vec{R_N}\|$
avec f coeff. dpd matériaux et état de surface.

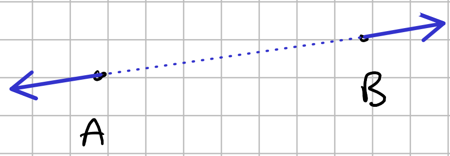
<u>Immobile</u> : $\|\vec{R_T}\| < f\,\|\vec{R_N}\|$

Décollage $\Leftrightarrow \|\vec{R_N}\| = 0$.

10) <u>1er ppe</u> : $\exists$ des réf tq tout corps isolé est en TRU.
Ce sont les réf. <u>galiléens</u>.

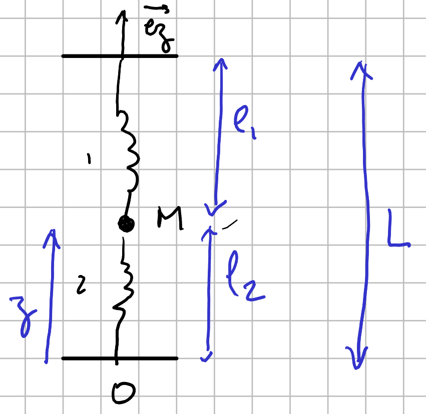
<u>2e ppe</u> : Pour pt matériel de masse m dans réf. galiléen : $\boxed{m\vec{a} = \Sigma\vec{F}}$

<u>3e ppe</u> :



$\vec{F}_{A\to B} = -\vec{F}_{B\to A}$
portées par droite (AB)

11)



- $\vec{F_1} = k(\ell_1 - \ell_0)\,\vec{e_z}$
- $\vec{F_2} = -k(\ell_2 - \ell_0)\,\vec{e_z}$
- $\left|\begin{array}{l} \ell_1 = L - z \\ \ell_2 = z \end{array}\right.$ $\quad \vec{F_1} = k(L - z - \ell_0)\,\vec{e_z}$, $\quad \vec{F_2} = -k(z - \ell_0)\,\vec{e_z}$.

12) TEC (en joules) : $\boxed{\Delta E_c = W}$

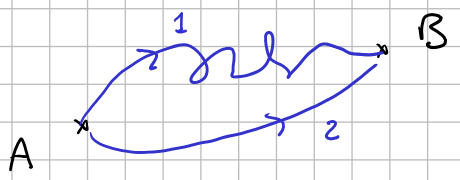
$E_c(t_2) - E_c(t_1)$ $\qquad \int_{t_1}^{t_2} P\,dt$ avec $P = \vec{F}\cdot\vec{v}$

et $E_c = \frac{1}{2} m v^2$

A utiliser quand on veut $\|\vec{v}\|$, plus facile que le PFD.

13) $W_{1\to 2} = \int_{t_1}^{t_2} P(t)\,dt$ | Energie reçue par le corps pendant Δt. et apportée par la force.

14)



$W_{A\to B}$ indpt du mvt suivi par le corps

<u>forces conservatives</u>.

15) $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_p)$

16) $\uparrow \vec{e_z}$ $\quad E_{pp} = mgz$ $\qquad E_{p\,ressort} = \frac{1}{2} k (\ell - \ell_0)^2$

$\vec{e_z} \downarrow$ $\quad E_{pp} = (-)\, mgz$

17) TEM (joules) : $\boxed{\Delta E_m = W_{nc}}$ | TEM (watts) : $\boxed{\frac{dE_m}{dt} = P_{nc}}$

$E_m(t_2) - E_m(t_1)$

Qd au moins une force conservative $\longrightarrow$ TEM

NE PAS calculer le travail d'une force conservative !

18) <u>Mvt conservatif</u> : toutes les forces qui travaillent sont conservatives. TEM : $E_m = C^{te}$ dans tps

19) <u>Posit° d'EQ</u> : Qd on y pose un pt M immobile, il y demeure immobile. Nécessite $\sum \vec{F} = \vec{0}$ en ce pt

<u>EQ stable</u> : Qd une perturbat° écarte le pt mat. M de la posit° d'EQ, les forces qui apparaissent tendent à ramener le point M vers la posit° d'EQ.

20) NB rappel : Fondamentalt, E_p est une f° de la <u>posit°</u>.
En φ^is, on parle de champ.

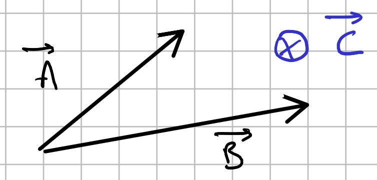
EQ en $x = x_0$ $\iff$ la f° $E_p(x)$ est extrêmale : $\frac{dE_p}{dx}(x = x_0) = 0$

si minimale $\left(\frac{d^2 E_p}{dx^2}(x = x_0) > 0\right)$ alors EQ stable

si maximale $\left(\frac{d^2 E_p}{dx^2}(x = x_0) < 0\right)$, alors EQ instable

21) Petites oscill° autour d'une posit° d'EQ sont sinusoïdales.
On parle d'oscillateur harmonique.

Dans tt ce qui suit, M un pt matériel masse m et $\vec{F}$ est force totale qui lui est appliquée

22) 

règle des 3 doigts de la main droite

→ pouce sur $\vec{A}$
→ index sur $\vec{B}$
} le majeur, placé ⊥ à la paume donne $\vec{C}$

23) $\vec{M}_o(\vec{F}) \overset{déf}{=} \vec{OM} \wedge \vec{F}$

* Direct° de $\vec{M}_o$ donne l'axe autour duquel $\vec{F}$ tend à faire tourner le pt M.

* Norme de $\vec{M}_o$ donne l'intensité de cette tendance à la rotat°.

* Sens de $\vec{M}_o$ donne le sens de cette tendance à la rotat°, via la règle de la main droite
↓
Pouce dans dir° et sens de $\vec{M}_o$, les autres doigts courbés donne le sens de rotat°.

24) $\vec{L}_o \overset{déf}{=} \vec{OM} \wedge m\vec{v}$ → c'est la qté de mvt $\vec{p}$.

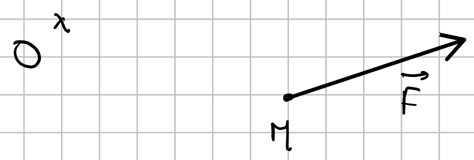
* Direct° de $\vec{L}_o$ donne l'axe passant par O autour duquel le pt M est entrain de tourner

} cela donne aussi le plan contenant O et dans lequel M est en mvt (plan ⊥ $\vec{L}_o$)

* Norme de $\vec{L}_o$ donne la quantité de mouvement de rotat° du pt mat. M autour de cet axe

* Sens de $\vec{L}_o$ donne le sens de la rotat° (règle main droite)

25)



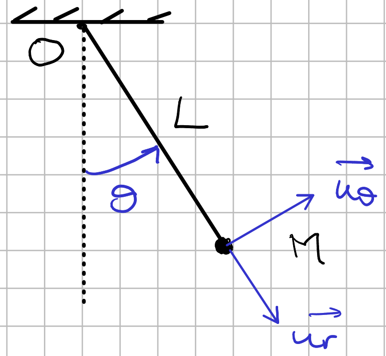
* Avec le bras de levier, on calcule facilement la norme $\|\vec{M_O}(\vec{F})\| = \|\vec{F}\| \times d_{force}$

* On trouve ensuite $\vec{M_O}(\vec{F})$ avec règle main droite.

26) Idem ci-dessus, en remplaçant " $\vec{F}$ " par " $\vec{p}$ " la qté de mvt.

27) TMC /r pt A fixe, appliqué à pt mat. M dans R galiléen :

$$\frac{d\vec{L_A}}{dt} = \vec{M_A}(\vec{F})$$



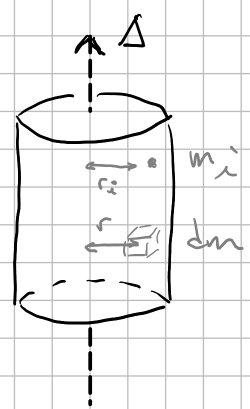
$\vec{OM} = L\vec{u_r}$ $\qquad \vec{v} = L\dot{\theta}\vec{u_\theta}$

* $\vec{L_O} =$

* $\vec{M_O}(\vec{T}) =$
* $\vec{M_O}(\vec{P}) =$

28) Moment d'inertie J_Δ ≡ inertie à la mise en rotatᵒ

Joue, pour solide, le rôle que masse joue pour pt. mat.



$J_\Delta \overset{déf}{=} \iiint_V r^2\, dm$

en discret : $\left(J_\Delta \overset{déf}{=} \sum_i m_i r_i^2 \right)$

* TMC /r axe orienté Δ appliqué au solide dans Rgal.

$$\boxed{J_\Delta \frac{d\omega}{dt} = \Gamma_{ext}}$$

* TEC (m̂ conditᵒ) $\frac{dE_c}{dt} = P_{ext}$

$E_c = \frac{1}{2} J_\Delta \omega^2$ $\qquad \Gamma_{ext}\,\omega$

NB : Pas de P_{int} pour solide.

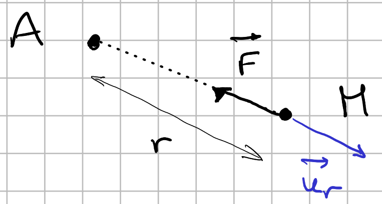
* si syst. déformable : $\frac{dE_c}{dt} = P_{ext} + \underline{P_{int}}$

29) force centrale conservative ⟶ dérive d'une Epot.

∀t, droite support passe par un pt A, fixe dans Rgal.

$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\,E_{pot}$

donne $\vec{F} = -\frac{dE_{pot}}{dr}\,\vec{u_r}$



NB : A est en gᵃˡ choisi comme origine et donc nommé O.

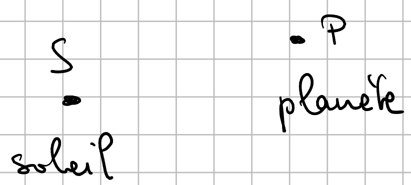
30) Em et $\vec{L_A}$ sont conservés (dans le tps).

dém° : TEM
TMC en A

↳ loi des aires

↳ mouvement est contenu dans le plan contenant A et ⊥ $\vec{L_A}$.

31) Lois Kepler : ① orbites planètes : ellipses, soleil occupe un des foyers.

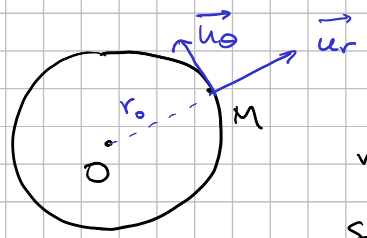


② Loi aires : durant des durées Δt égales, les aires balayées par le rayon-vecteur $\vec{SP}$ sont égales.

③ $\frac{T^2}{a^3} =$ "Cste" : la m̂ ∀ objet en orbite

$\text{Cste} = \frac{4\pi^2}{GM_s}$ dpd uniqᵗ de masse de l'astre attracteur.

32)



Réf. galiléen géocentrique. PFD :

$$m\vec{a} = \vec{F} \quad \text{avec} \quad \vec{F} = -G\frac{m M_T}{r_0^2}\vec{u_r}$$

satellite de masse m
Terre ——— M_T

$$\overrightarrow{OM} = r_0\vec{u_r}$$
$$\vec{v} = r_0\dot{\theta}\vec{u_\theta}$$
$$\vec{a} = r_0\ddot{\theta}\vec{u_\theta} - r_0\dot{\theta}^2\vec{u_\theta}$$

d'où $r_0\ddot{\theta}\vec{u_\theta} - r_0\dot{\theta}^2\vec{u_r} = -G\frac{M_T}{r_0^2}\vec{u_r}$

→ $(\vec{u_\theta})$: $r_0\ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \boxed{\dot{\theta} = C^{te}}$ vit. angulaire est C^{te}.

$(\vec{u_r})$: $\underbrace{r_0^2\dot{\theta}^2}_{\|\vec{v}\|^2} = G\frac{M_T}{r_0} \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{GM_T}{r_0}}}$

→ $E_m = E_c + E_p$ avec $E_p = -G\frac{mM_T}{r_0}$

$$= \frac{1}{2}m\left(\frac{GM_T}{r_0}\right) - G\frac{mM_T}{r_0} \Rightarrow \boxed{E_m = -\frac{1}{2}\frac{GmM_T}{r_0}}$$

→ On constate que $\boxed{E_m = \frac{E_p}{2}}$

→ Cas circulaire, $\|\vec{v}\|$ constante, donc période T :

$$T = \frac{\text{périmètre orbite}}{\text{vitesse}} = \frac{2\pi r_0}{\sqrt{\frac{GM_T}{r_0}}}$$

au carré

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r_0^3}{GM_T}$$

$$\boxed{\frac{T^2}{r_0^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}}$$

La mesure de T et r_0
d'un satellite donne accès à masse de la Terre !

33) OHis : $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$

↳ terme > 0 !

Harmonique ⇕ Sinusoïdal

Sol° : $x(t) = B\cos(\omega_0 t) + C\sin(\omega_0 t)$

ou

$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$

34) $\ddot{u} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{u} + \omega_0^2 u = 2^{nd}$ membre

Polynôme caractis : $r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$

$$\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2\left(\frac{1}{4Q^2} - 1\right)$$

3 régimes :

- $\Delta > 0$, i.e. $Q < \frac{1}{2}$: apériodique

$u(t) = A e^{r_1 t} + B e^{r_2 t}$ (r_1, r_2) racines

avec $r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \omega_0\sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}$

- $\Delta < 0$, i.e. $Q > \frac{1}{2}$: pseudo-périodique

$r = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\,\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$ → "ω" : pseudo-pulsat°

$$u(t) = e^{Re\{r\}\times t}\underbrace{\left[B\cos\left(Im\{r\}\times t\right) + C\sin\left(Im\{r\}\times t\right)\right]}$$

$\boxed{\text{ou}}$ $A\cos\left(Im\{r\}\times t + \varphi\right)$

- $\Delta = 0$, i.e. $Q = \frac{1}{2}$, régime critique. Approchable, mais jamais accessible.

35) $\ddot{x} - \omega_0^2 x = 0$

↳ terme < 0 : ce n'est PAS l'OH

Trinôme caractéristique : $r^2 - \omega_0^2 = 0$ $\quad r = \pm \omega_0$

$$\boxed{x(t) = A e^{\omega_0 t} + B e^{-\omega_0 t}}$$

On peut aussi utiliser $ch(\omega_0 t)$ et $sh(\omega_0 t)$

36) $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F}{m}\cos(\omega t)$

- En régime sinusoïdal forcé : $x(t) = X\cos(\omega t + \varphi)$
- Notation cpx : position cpx $\underline{x}(t) = X e^{j(\omega t + \varphi)}$

  ampl. cpx $\underline{X} = X e^{j\varphi}$

Ne pas oublier de transformer / noter terme $\frac{F}{m}\cos(\omega t)$ aussi !

$\frac{F}{m} e^{j\omega t}$!

d'où $\underline{x}(j\omega)^2 + \frac{\omega_0}{Q}(j\omega)\underline{x} + \omega_0^2 \underline{x} = \frac{F}{m} e^{j\omega t}$

puis $-\underline{X}\omega^2 + j\frac{\omega\omega_0}{Q}\underline{X} + \omega_0^2 \underline{X} = \frac{F}{m}$

$$\boxed{\underline{X} = \frac{F/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega\omega_0}{Q}}}$$

(c'est homogène)

Amplitude X via $X = |\underline{X}|$, donc :

$$\boxed{X = \frac{F/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega\omega_0}{Q}\right)^2}}}$$