TD 0 : Analyse dimensionnelle, DL, EquaDiff

<u>Exercice 1</u> : Analyse dimensionnelle en thermodynamique

1. Grâce à la loi des gaz parfaits, établir la dimension de la constante R des gaz parfaits. Est-il justifié d'exprimer son unité en $J.K^{-1}.mol^{-1}$?

2. Le modèle d'atmosphère isotherme (température indépendante de l'altitude) permet d'établir théoriquement une loi de variation de la pression atmosphérique P avec l'altitude z. Cette loi reproduit assez bien les mesures :

$$P(z) = P_0 \exp\left(-\frac{Mgz}{RT}\right)$$

où g est l'accélération de la pesanteur, R la constante des gaz parfait et T la température de l'atmosphère.

- Quelles sont la dimension et la signification de P_0 ? Dans quelle unité s'exprime-t-elle généralement ?
- Connaissant la dimension de R, quelle est la dimension de la grandeur M ? Dans quelle unité s'exprime-t-elle généralement ?

On donne les valeurs numériques suivantes, exprimées avec les unités couramment utilisées pour chacune des grandeurs : *g = 9,8 (unité courante) ; T = 25 °C ; M = 30 (unité courante) ; R = 8,314* $J.K^{-1}.mol^{-1}$.

A l'aide de ces quatre grandeurs, on peut définir une altitude z_c caractéristique de la variation de la pression avec l'altitude. Donner sa valeur numérique.

<u>Exercice 2</u> : Analyse dimensionnelle en électricité

On donne $y = \left(D + \frac{L}{2}\right) \times \frac{qUL}{mdv^2}$ avec D une longueur, d aussi, q une charge électrique, U une tension, m une masse et v une vitesse. Déterminer la dimension de y.

<u>Exercice 3</u> : Analyse dimensionnelle en mécanique

1. A partir de la loi de gravitation de Newton, donner l'unité de la constante universelle de gravitation G.

2. En identifiant, en première approximation et au niveau du sol, la force de pesanteur et la force de gravitation, on peut exprimer l'accélération de la pesanteur g en fonction de la constante de gravitation G, de la masse de la Terre M_T et du rayon de la Terre R_T. Trouver cette expression par analyse dimensionnelle.

<u>Exercice 4</u> : Deviner (ou retrouver) des relations entre grandeurs grâce à l'analyse dimensionnelle

1. On rappelle qu'un pendule simple est constitué d'un point matériel de masse m relié à un point fixe par un fil de longueur L. Le pendule est libre de se balancer autour de sa position d'équilibre verticale.
L'étude expérimentale du pendule simple en salle de TP montre que la période des oscillations ne dépend que de la longueur du fil. Déterminer par analyse dimensionnelle l'expression de la période des oscillations en fonction des grandeurs physiques impliquées dans le phénomène.

2. On considère un point matériel de masse m relié à un point fixe par un ressort de raideur k. Le système est posé sur un support horizontal et libre d'osciller sans frottement autour de sa position d'équilibre stable. Par analyse dimensionnelle, donner l'expression de la période des oscillations en fonction des grandeurs physiques impliquées dans le phénomène.

3. Un satellite est en orbite circulaire de rayon R autour de la Terre. La *norme* de sa vitesse v en orbite est constante. Par analyse dimensionnelle, donner l'expression de la norme de l'accélération (centripète) du satellite.

Exercice 5 : Estimations d'ordre de grandeur

Les estimations d'ordres de grandeur sont extrêmement importantes en physique, dans l'industrie et dans la vie de tous les jours. Cela permet à l'occasion de vérifier la pertinence de résultats numériques. Si l'on souhaite dénombrer les cheveux que l'on possède sur la tête, estimer un ordre de grandeur permet de se faire une idée, même assez vague. En possède-t-on mille, ou un million, ou plus ?

1. Donner un ordre de grandeur du nombre de cheveux qu'un individu adulte (sans calvitie) possède.
2. En combien de temps peut-on relier en voiture Brest et Nice ?
3. Achèteriez-vous une montre précise à 99,9% ?
4. A quelle vitesse marche-t-on habituellement ?
5. La circonférence de la Terre est d'environ 40 000 km à l'équateur. Estimer le rayon et la masse de la Terre.
6. Quelle est la vitesse d'un avion supersonique en km/h ? En combien de temps fait-il le tour de la Terre ?
7. Quelle est la taille d'un atome ?
8. Sachant que la lumière du soleil met 8 min pour atteindre la Terre, à quelle vitesse se déplace la Terre sur son orbite circulaire autour du soleil ?
9. Si c'était possible, en combien de temps un vaisseau piloté par un être humain pourrait-il atteindre la vitesse de la lumière (sans tenir compte des effets de la relativité restreinte) tout en gardant l'être humain en vie ?
10. Combien de pulsations doit pouvoir délivrer un stimulateur cardiaque sans être rechargé ?

Exercice 6 : Equations différentielles et développements limités

1. Résoudre l'équation y'' + y' + 4y = 12, sachant que y(t=0) = 0 et y'(t=0) = 0.
2. Résoudre l'équation y'' - 4y' + y = 0, sachant que y(t=0) = 0 et y'(0) = C.
3. Résoudre l'équation y'' + 3y' = 2, sachant que y(t=0) = 3 et y'(t=0) = 0

Exercice 7 : Calcul de dérivées

On considère un modèle (virtuel) de gaz dont l'équation d'état est la suivante :

$$P = \frac{rT}{\sqrt{\alpha V - b}} \exp\left(-\frac{a}{rTV}\right)$$

où r, a et α sont des constantes.

1. Calculer la dérivée de la fonction *P(T),* en considérant *V* constant.
2. Calculer la dérivée de la fonction *P(V)* en considérant *T* constant.

Quelques indices pour l'exercice 1 :

1. La pression est une force par unité de surface. Une force multipliée par une longueur est une énergie (« travail d'une force »).

2. On trouve que M est la masse molaire. L'altitude caractéristique z_c est définit par l'expression :

$$P_0 \exp\left(-\frac{z}{z_c}\right)$$

On trouve environ 8km.