Chap.2 – Symétries et invariances – Théorème de Gauss

Intro :
Calculer le champ électrostatique à partir de son expression intégrale est souvent compliqué. On introduit dans ce chapitre le *Théorème de Gauss*, qui traduit une propriété fondamentale du champ, et qui se révèle être un outil puissant pour calculer le champ dans le cas de distributions de charge « hautement symétriques ».

Avant de présenter ce théorème, on introduit les notions de *symétries* et *d'invariances* d'une distribution de charges, ainsi que la notion de *flux du champ à travers une surface*.

1. Conséquences des symétries et invariances sur le champ électrostatique

L'objectif de cette étude est de *déterminer certaines propriétés du champ avant tout calcul*, en repérant les symétries et invariances de la distribution de charges qui le génère.

Les invariances et symétries des causes doivent se retrouver dans les effets produits.

La distribution de charge est la *cause*, et le champ électrostatique créé est *l'effet produit*.

1.1. Invariance par translation

Définition

*Il y **invariance** de la distribution **par translation selon un axe $\overrightarrow{e_z}$**,*
*si la **distribution ne dépend pas de la coordonnée z** suivant cet axe.*
Les invariances par translation ne concernent que les distributions infinies.

Propriété du champ $\vec{E}$

*Le champ $\vec{E}$ créé par une distribution invariante par translation possède **la même invariance.***

Exemples :

- Pour les distributions suivantes, définir un système de coordonnées, et repérer selon quelle(s) translation(s) la distribution est invariante.
- Préciser alors les invariances pour le champ $\vec{E}$. De quelles coordonnées de position dépend-il ?

- Fil rectiligne infini uniformément chargé
- Plan infini uniformément chargé
- Cylindre infini uniformément chargé en volume, puis en surface.

Remarque (Cas plus général que l'on ne rencontrera pas) :
Il y a invariance de la distribution de charge par translation de vecteur $\vec{a}$ si la distribution image est identique à la distribution initiale.

1.2. Invariance par rotation

Définition

*Il y a **invariance** de la distribution par **rotation autour d'un axe $\overrightarrow{e_z}$**,*
*si la distribution **est identique à elle-même par rotation** autour de cet axe.*

*En coordonnées **cylindriques** d'axe vertical $\overrightarrow{e_z}$, la distribution **ne dépend donc pas de θ**.*

Définition

*Il y a **invariance** de la distribution par **rotation autour d'un point O**,*
*si la distribution est **identique à elle-même par une rotation quelconque** (angle et axe) autour de O.*

*En coordonnées **sphériques**, la distribution est alors **indépendante de θ et de φ.***

Propriété du champ $\vec{E}$

*Le champ électrostatique créé par une distribution invariante par rotation possède **la même invariance**.*

Exemples :

- Pour les distributions suivantes, définir un système de coordonnées, et repérer selon quelle(s) rotation(s) et quelle(s) translation(s) la distribution est invariante.
- Préciser alors les invariances pour le champ électrostatique, et les conséquences sur l'étude du champ.

- Fil rectiligne de longueur *L* uniformément chargé.
- Fil rectiligne infini uniformément chargé.
- Fil circulaire uniformément chargé.
- Disque de rayon *R* uniformément chargé.

- Plan infini uniformément chargé.
- Cylindre de hauteur *H* uniformément chargé en volume, puis en surface.
- Cylindre infini uniformément chargé en volume, puis en surface.
- Sphère uniformément chargée en volume, puis en surface.

Remarque (Cas plus général que l'on ne rencontrera pas) :
Il y a invariance de la distribution par rotation d'angle α autour d'un axe $\overrightarrow{e_z}$, si la distribution image est identique à la distribution initiale.

Conclusion

*Les **invariances** de la distribution de charge par translation et/ou rotation permettent de déterminer la **dépendance du champ $\vec{E}(M)$ avec les coordonnées du point M où il est évalué**.*

1.3. Symétrie plane

*La distribution admet **un plan de symétrie Π**, si pour tout point P de la distribution :*
- *il existe un point P' de la distribution, **symétrique de P par rapport au plan Π***
- $\boldsymbol{\rho(P') = \rho(P)}$

La définition est similaire pour une distribution discrète, surfacique ou linéique.

Propriété du champ $\vec{E}$

$$M' = sym_\Pi[M] \quad \Rightarrow \quad \vec{E}(M') = sym_\Pi\left[\vec{E}(M)\right]$$

Corollaire

$$M \in \Pi \quad \Rightarrow \quad \vec{E}(M) \text{ est inclus dans le plan } \Pi$$

Si M appartient à 2 plans de symétrie, $\vec{E}(M)$ est colinéaire à l'intersection des deux plans.

Remarque : Ce dernier cas est le plus favorable, car il permet de déterminer complètement la direction du champ.

Exemples :
- Pour les distributions suivantes, repérer le(s) plan(s) de symétrie.
- Repérer ensuite les points *M* de l'espace pour lesquels la direction du champ électrostatique peut-être facilement déterminée. Synthétiser alors toutes les infos connues sur le champ en ces points.

- Fil rectiligne de longueur *L* uniformément chargé.
- Fil rectiligne infini uniformément chargé.
- Disque de rayon *R* uniformément chargé.
- Plan infini uniformément chargé.
- Cylindre de hauteur *H* uniformément chargé en volume, puis en surface.
- Cylindre infini uniformément chargé en volume, puis en surface.
- Sphère uniformément chargée en volume, puis en surface.

1.4. Antisymétrie plane

*La distribution admet **un plan d'antisymétrie Π_a**, si pour tout point P de la distribution :*
- *il existe un point P' de la distribution, **symétrique de P par rapport au plan Π_a***
- $\boldsymbol{\rho(P') = -\rho(P)}$

La définition est similaire pour une distribution discrète, surfacique ou linéique.

Propriété du champ $\vec{E}$

$$M' = sym_{\Pi_a}[M] \quad \Longrightarrow \quad \vec{E}(M') = -sym_{\Pi_a}\left[\vec{E}(M)\right]$$

Corollaire

$$\boldsymbol{M \in \Pi_a} \quad \Longrightarrow \quad \vec{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{M}) \textit{ est orthogonal au plan } \boldsymbol{\Pi_a}$$

Remarque : Il suffit d'un seul plan d'antisymétrie pour déterminer la direction du champ en tout point *M* de ce plan. Mais les plans d'antisymétrie sont plus rares.

Exemples :

- Pour la distribution suivante, repérer le(s) plan(s) d'antisymétrie.
- Repérer ensuite les points *M* de l'espace pour lesquels la direction du champ électrostatique peut-être facilement déterminée.

- Fil rectiligne de longueur L de charge linéique λ_0 sur une moitié, $-\lambda_0$ sur l'autre moitié.

1.5. Cas du champ de gravitation

Toutes les définitions et propriétés d'invariance et de symétrie vues dans le cas du champ électrique se généralisent au cas du champ gravitationnel, *sauf les plans d'antisymétrie* qui n'existent pas dans le cas gravitationnel (pas de masse négative).

Conclusion invariance / plan de symétrie

Repérer les **invariances** *permet de déterminer la dépendance de $\vec{E}$ avec* **les coordonnées du point M**
Repérer les ***(anti-)symétries planes*** *permet de déterminer* **la direction de $\vec{E}$**

2. Flux du champ électrostatique – Théorème de Gauss

2.1. Orientation d'une surface dans l'espace 3D

On rappelle qu'une surface « finie » peut être découpée en une multitude de surfaces élémentaires. *Chaque surface élémentaire est infiniment petite et peut être assimilée à son plan tangent*. Par conséquent, toutes les surfaces élémentaires sont des plans.

Une surface élémentaire est dite *orientée* lorsque l'on choisit conventionnellement d'orienter son *vecteur normal*. L'écriture suivante n'a de signification précise que si l'on a ***au préalable orienté le vecteur $\vec{n}$ sur un schéma*** :

$$\overrightarrow{dS} = dS\,\vec{n}$$

où *dS* est l'aire élémentaire.

Orienter une surface finie revient à orienter la surface en tout point : en un point *M* de la surface, on oriente le vecteur normal au plan tangent à la surface. *Il est évident que la convention d'orientation doit être la même en tout point de la surface !!*

On rappelle qu'une surface fermée est une surface délimitant un volume. De telles surfaces sont ***toujours conventionnellement orientées vers l'extérieur***.

2.2. Flux élémentaire du champ à travers une surface élémentaire

*On définit le **flux élémentaire** $\boldsymbol{d\phi}$ du champ électrique **à travers la surface élémentaire** $\overrightarrow{\boldsymbol{dS}}$:*

$$d\phi \stackrel{\text{def}}{=} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS}$$

le champ $\vec{E}$ étant évalué sur la surface élémentaire.

<u>Remarques</u> :

- Le flux élémentaire est défini à partir d'une surface infiniment petite (élémentaire) : ainsi le champ électrique est *uniforme* à l'échelle de cette surface élémentaire. Peu importe alors où se trouve le point M sur cette surface.

- On verra que l'unité de champ électrique est le $V.m^{-1}$. L'unité d'un flux de champ électrique est le $V.m$.

<u>Commentaires</u> :

- Le flux est une grandeur <u>*algébrique*</u> : son signe indique <u>*le sens*</u> dans lequel le champ électrique « traverse » la surface élémentaire :
  - s'il est positif, alors le champ traverse la surface dans le même sens que $\overrightarrow{dS}$
  - s'il est négatif, alors le champ traverse la surface dans le sens opposé à $\overrightarrow{dS}$

- La <u>*valeur absolue*</u> du flux est déterminée par la *norme du champ* et par *l'angle entre le champ et le vecteur* $\overrightarrow{dS}$. Pour une norme donnée du champ, la valeur absolue du flux est *maximale* quand le $\vec{E}$ et $\overrightarrow{dS}$ sont colinéaires, et *nulle* quand le champ $\vec{E}$ et $\overrightarrow{dS}$ sont orthogonaux.

2.3. Flux du champ à travers une surface finie

Une surface finie peut être découpée en une multitude de surfaces élémentaires.

*Le **flux** $\boldsymbol{\phi}$ du champ électrique à travers une **surface finie S** est défini comme la somme des flux élémentaires :*

$$\phi \stackrel{\text{def}}{=} \iint_S d\phi = \iint_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS}$$

*Dans le cas d'une **surface fermée**, la surface est **toujours orientée vers l'extérieur**, et l'expression :*

$$\phi = \oiint_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS}$$

*définit donc le **flux sortant**.*

*Il est <u>indispensable d'avoir repéré la surface sur un **schéma**</u> pour pouvoir parler de « flux du champ ». Il est préférable dans un premier temps de s'habituer à dire « flux du champ à travers une surface ».*

➢ On dessine une sphère dont le centre est occupé par une particule de charge positive (resp. négative). Quel est le signe du flux du champ à travers la sphère ?

2.4. Théorème de Gauss

On admet ce théorème ; il est valable quelque soit la ou les distributions de charge considérées.

<u>Théorème de Gauss</u>

Le théorème de Gauss établit une relation entre le flux du champ électrostatique à travers une surface <u>*fermée*</u>, et la charge électrique <u>*totale*</u> située à <u>*l'intérieur*</u> du volume délimité par cette surface fermée.

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Ce théorème est une propriété du champ électrique, due à son expression en « $\frac{\overrightarrow{u_{PM}}}{PM^2}$ ». C'est aussi un outil très puissant pour déterminer l'expression du champ électrostatique dans le cas de distributions de charge « hautement symétriques ».

2.5. Cas du champ de gravitation

Le champ gravitationnel est aussi un champ en « $\frac{\overrightarrow{u_{PM}}}{PM^2}$ ». Le théorème de Gauss est donc aussi valable pour le champ gravitationnel.

- D'après l'analogie faite entre les formules des cas électrique / gravitationnel, donner l'expression du théorème de Gauss pour la gravitation.

3. Exemples de calcul de champ à l'aide du Théorème de Gauss

3.1. Méthodes pour calculer un champ en un point de l'espace

On cherchera généralement à déterminer l'expression du champ électrique en un point *M* quelconque de l'espace où il est défini.

Méthode théorème de Gauss
*(**préférable** si la distribution de charge est « hautement symétrique »)*

1. Repérer les invariances de la distribution de charge, source du champ, *pour déterminer la **dépendance** du champ par rapport aux **coordonnées** du point* M. Il faut définir au préalable un système de coordonnées approprié aux symétries de la distribution de charge.

2. Repérer les symétries (ou antisymétries) planes de la distribution de charge, source du champ, *pour déterminer la **direction** du champ électrique au point M*. *Ces plans doivent contenir le point M*.

3. Définir une « surface de Gauss », *passant par le point M*, et sur laquelle le champ électrique est *uniforme* (si possible).

4. Appliquer alors le théorème de Gauss. Grâce aux étapes précédentes, le calcul du flux (intégrale double) est généralement très simple si la distribution de charge est « hautement symétrique ».

Méthode « directe » :

A chaque fois que cela est possible, on détermine la direction du champ et sa dépendance avec les coordonnées du point *M*, grâce aux *invariances* et *symétries*, et ce *avant tout calcul*.

Ensuite, comme au premier chapitre, on calcule directement le champ par calcul d'intégrale. Cela donne souvent des calculs compliqués. *On évitera si possible d'utiliser cette méthode !!*

3.2. Fil rectiligne infini uniformément chargé

Pour tout point *M* de l'espace, déterminer l'expression du champ électrostatique créé par un fil rectiligne infiniment long et uniformément chargé.

Représenter ensuite graphiquement l'évolution de la projection du champ (selon un vecteur unitaire approprié) en fonction de la coordonnée appropriée.

3.3. Plan infini uniformément chargé

Idem.

3.4. Sphère uniformément chargée

Idem pour une sphère uniformément chargée en volume.
Idem pour une sphère uniformément chargée en surface.

3.5. Champ gravitationnel créé par un astre à symétrie sphérique

Dans le cours de mécanique traitant des CFCC (mouvement planètes et satellites), on a admis que le champ gravitationnel créé par un astre *à symétrie sphérique* pouvait être assimilé au champ créé par un point matériel de même masse, situé au centre de l'astre.

- Démontrer cet énoncé à l'aide du théorème de Gauss.

Notions clefs

Savoirs :
- Définitions invariances + csq sur dépendance du champ avec position du point M
- Définition symétrie plane / antisymétrie plane + csq sur la direction du champ en un point M de ces plans
- Orientation d'une surface élémentaire, d'une surface finie
- Définition du flux élémentaire du champ à travers une surface élémentaire
- Définition du flux du champ à travers une surface finie + interpréter son signe
- Enoncé théorème de Gauss : cas électrique / gravitationnel
- Etapes de la méthode de calcul du champ grâce au Th. Gauss

Savoirs faire :
- Repérer les invariances et symétries (antisymétrie) planes d'une distribution de charge
- Déterminer un champ en un point M grâce au Th. Gauss
- Appliquer tous les résultats de ce chapitre au cas gravitationnel
- Redémontrer les exemples étudiés