

Chap.1 – Ondes de d'Alembert 1D (milieu non dispersif)

1. Ondes transversales sur une corde vibrante

- 1.1. Modélisation simplifiée
- 1.2. Equation d'onde de d'Alembert

2. Ondes sonores longitudinales dans un solide

- 2.1. Elasticité des solides – Module d'Young
- 2.2. Equation d'onde de d'Alembert
- 2.3. Modèle microscopique de l'élasticité d'un solide : chaîne d'atomes reliés par des ressorts

3. Familles de solutions de l'équation de d'Alembert

- 3.1. Les ondes progressives
- 3.2. Les ondes progressives harmoniques (ou monochromatiques)
- 3.3. Relation de dispersion – Vitesse de phase (OPH)
- 3.4. Les ondes stationnaires
- 3.5. Lien entre les deux familles de solutions : OPH et OS

4. Applications des ondes stationnaires à la corde vibrante

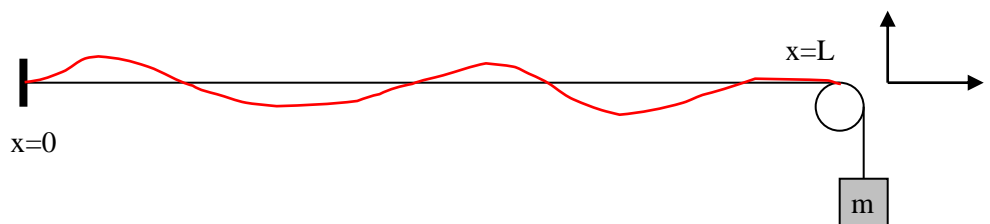
- 4.1. Modes propres d'une corde fixée à ses deux extrémités (régime libre)
- 4.2. Résonances sur la corde de Melde (régime sinus forcé)

Intro : Une onde se définit comme la propagation d'une perturbation au sein d'un milieu. Nous étudierons deux grandes catégories d'onde : les ondes *mécaniques* (au sein des milieux déformables) et les ondes *électromagnétiques* (dans le vide ou les milieux matériels). En PCSI et au lycée, la notion d'onde n'a été abordée que de manière qualitative. Il s'agit ici de *mathématiser* l'étude des ondes, en commençant par le cas le plus simple, celui d'une onde se propageant dans un milieu *non-dispersif*, *non-absorbant*, et *unidimensionnel*. L'équation aux dérivées partielles pilotant le phénomène s'appelle *l'équation d'onde*. Dans le cas d'un milieu non-dispersif, il s'agit de *l'équation de d'Alembert*.

1. Ondes transversales sur une corde vibrante

1.1. Modélisation simplifiée

Equilibre
Hors équilibre



Ondes transversales

L'onde de déformation de la corde est dite **transversale** car les **vibrations** de chaque bout de corde se font **orthogonalement à la direction de propagation** de l'onde.

On considère une corde homogène de masse linéique μ et tendue avec une tension T_0 à l'équilibre. On fait les approximations suivantes :

- on *néglige le poids* devant les forces de tension
- corde *homogène et infiniment souple à plier* (i.e. sans raideur : aucun effort pour la plier)
- corde *inextensible*
- les mouvements sont *transversaux* : on néglige le déplacement horizontal de chaque brin élémentaire
- les déplacements verticaux sont *petits*, donc l'angle α que fait un brin de corde avec l'horizontale *aussi* : on fera des DL en ne gardant que le terme d'ordre le plus bas

❖ Expérimentalement, alors que la corde vibre, on observe que la poulie et la masse sont immobiles. La poulie est libre de tourner autour d'une liaison pivot parfaite. En appliquant un TMC statique au système {poulie, portion de la corde au contact de la poulie}, montrer que la tension subie en $x = L$ par la corde vaut mg .

1.2. Equation d'onde de d'Alembert

On repère chaque point de la corde par le champ $y(x, t)$.

Dans ce paragraphe, le système est un brin élémentaire $d\ell$ de corde, situé entre x et $x + dx$.

Schéma (étape la plus importante) :

- ❖ Faire un schéma du brin de corde *au premier ordre* (i.e. brin assimilé à sa tangente à l'origine)
- ❖ Faire aussi un schéma du brin de corde *au deuxième ordre*, car on verra lors du calcul qu'il est nécessaire de tenir compte de sa courbure (mathématiquement représentée par le terme $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$)
- ❖ Dessiner les angles $\alpha(x, t)$ et $\alpha(x + dx, t)$ du brin avec l'horizontal
- ❖ Dessiner les forces appliquées au brin \vec{T}_1 et \vec{T}_2 .

Calculs :

- ❖ Appliquer le PFD au brin, et le projeter.
- ❖ Effectuer des DL afin de simplifier les équations (idée math : faire apparaître dx).
- ❖ En déduire l'EDiff vérifiée par $y(x, t)$
- ❖ Dans l'EDiff, identifier un paramètre homogène à une vitesse

Equation de d'Alembert

Un champ $s(x, t)$ vérifie l'équation de d'Alembert unidimensionnelle lorsque l'on peut écrire :

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}$$

$$c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}} \text{ est la célérité de l'onde.}$$

Elle est homogène à une vitesse, et nous verrons qu'elle représente *parfois* la vitesse de propagation de l'onde.

Paramètres du milieu influençant la célérité

On remarque que la célérité est fonction de la **raideur** T_0 du milieu et de son **inertie** μ :

$$c \leftrightarrow \frac{\text{raideur du milieu}}{\text{inertie du milieu}}$$

Remarques :

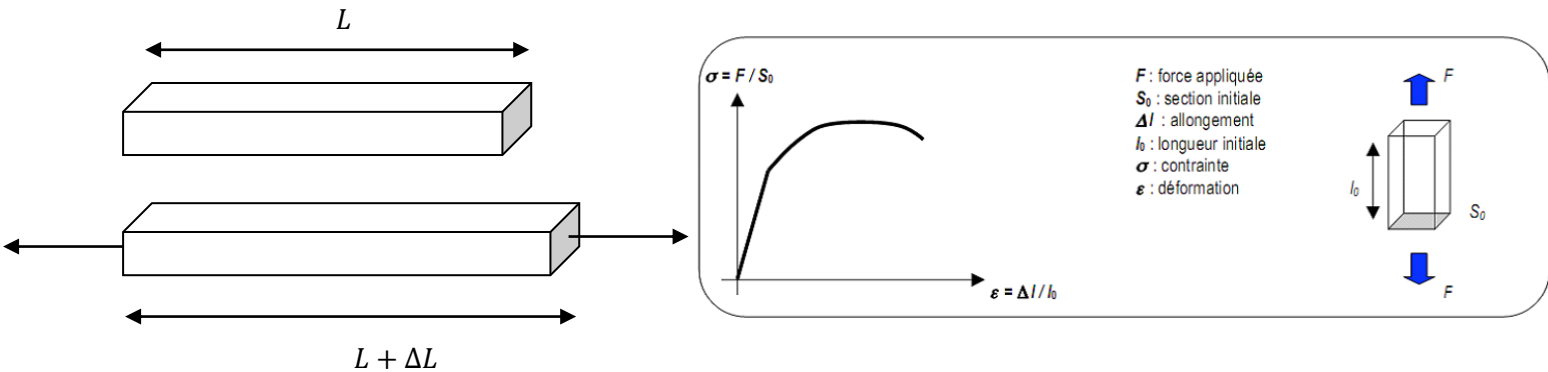
- *contrairement à l'équation de diffusion*, cette équation d'onde est **réversible en temps**. Si l'on visualise le film à l'envers, on ne voit rien de surprenant.
- corollaire : en présence de dissipation d'énergie (frottements, etc.) la propagation d'une onde *ne peut pas être décrite par l'équation de d'Alembert*

2. Ondes sonores longitudinales dans un solide

2.1. Elasticité des solides – Module d'Young

Lorsque l'on applique une force de norme F de part et d'autre d'un solide, sa longueur L initiale augmente proportionnellement à la force appliquée. Ce phénomène s'appelle **l'élasticité des solides**. Tous les solides usuels vérifient cette loi, tant que la force appliquée n'est pas trop grande : c'est la **loi de Hooke**.

Au-delà de ce domaine de comportement élastique, si l'on augmente trop la force, la déformation n'est plus proportionnelle à la force appliquée : c'est le domaine plastique.



Définition du module d'Young

On applique une force F aux deux extrémités d'un parallélépipède, de section S , de longueur initiale L . Le parallélépipède s'allonge de ΔL , **l'allongement relatif est proportionnel à la force surfacique** :

$$\frac{F}{S} = E \frac{\Delta L}{L}$$

Le **module d'Young E** est le coefficient de proportionnalité de cette déformation linéaire (en Pa)

AN : Fer $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$

2.2. Equation d'onde de d'Alembert

On note μ la masse volumique du solide, uniforme au repos. On considère une portion élémentaire d'un barreau situé en $[x; x + dx]$.

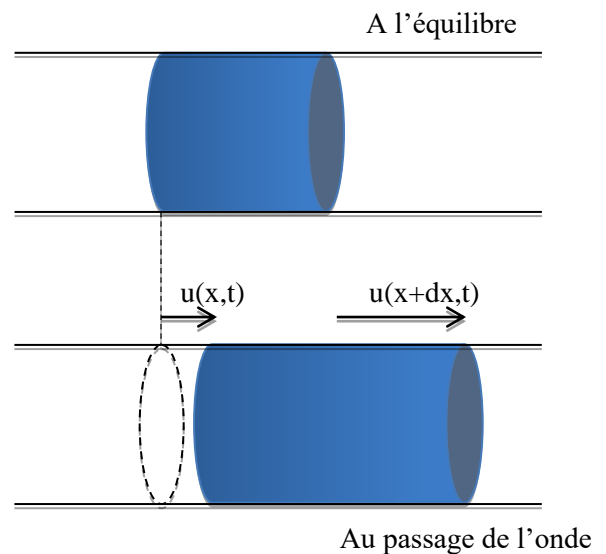
Quand le solide est traversé par une onde, on note $u(x, t)$ le déplacement d'un point du solide, point initialement en x quand le solide est au repos.

On suppose dans notre modélisation que $u \ll dx$: les déplacements restent très petits devant la taille d'une tranche considérée.

Le mouvement de la tranche est de très faible amplitude, aussi la loi de Hooke reste-t-elle valable car on reste très proche de l'équilibre mécanique. On néglige le poids.

En une section x du barreau, on introduit le champ de force $\vec{F}(x, t)$: « force de la droite sur la gauche ». $\vec{F}(x, t) = F(x, t)\vec{e}_x$

Remarque : On notera que la tranche étant de longueur élémentaire, les deux forces qui agissent sur ses extrémités sont nécessairement de sens opposé (divergentes si la tranche est étirée – c'est le cas dessiné –, convergentes si la tranche est comprimée).



❖ Exprimer l'allongement de la tranche en fonction de $u(x, t)$ et/ou ses dérivées

- ❖ Appliquer le PFD à la tranche, et en déduire une EDP vérifiée par les champs $u(x, t)$ et $F(x, t)$
- ❖ Introduire l'élasticité de la tranche en invoquant la loi de Hooke pour exprimer le champ de force $\vec{F}(x, t)$ en fonction du champ $u(x, t)$.
- ❖ En déduire l'EDP vérifiée par $u(x, t)$ en se limitant aux termes d'ordre 1 en $u(x, t)$ et ses dérivées
- ❖ Quelle est le nom de l'équation d'onde obtenue ? Evaluer numériquement la célérité des ondes sonores

Ondes longitudinales

*L'onde de déformation du solide est dite **longitudinale** car les **vibrations** de chaque bout de solide se font **parallèlement à la direction de propagation de l'onde.***

Equation de d'Alembert

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

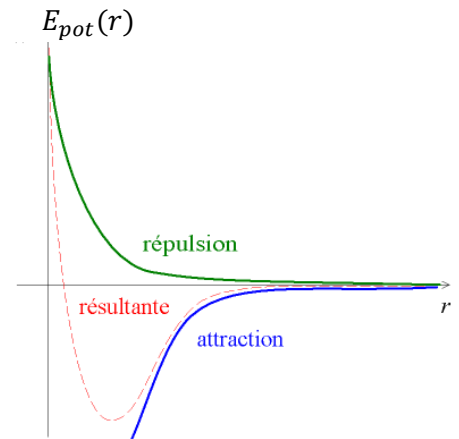
$$c = \sqrt{\frac{E}{\mu}}$$

On note qu'ici aussi la célérité est d'autant plus grande que la raideur est grande et l'inertie petite.

2.3. Modèle microscopique de l'élasticité d'un solide : chaîne d'atomes reliés par des ressorts

L'objectif est ici de tenter de comprendre l'origine microscopique de la loi de Hooke, et de retrouver un ordre de grandeur du module d'Young à partir de l'ordre de grandeur des énergies de liaison entre atomes.

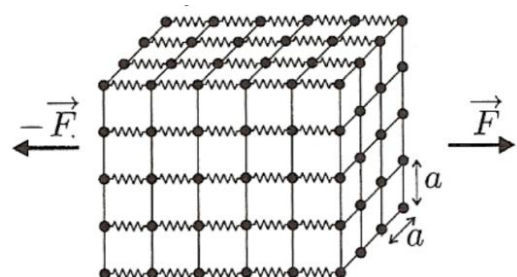
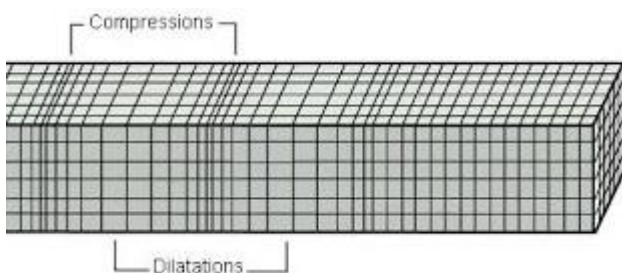
On s'intéresse tout d'abord à l'énergie potentielle d'interaction (ou énergie de liaison entre deux atomes d'un solide. La force de liaison est attractive à longue distance et répulsive à courte distance : c'est bien la raison pour laquelle un atome possède une position d'équilibre dans un solide. Il ne s'éloigne pas à l'infini, et ne vient pas se superposer à ses voisins. L'allure de l'énergie potentielle d'interaction associée est donnée ci-contre. La position d'équilibre est donnée par l'abscisse du minimum d'énergie potentielle.



Pour décrire de petits écarts du système de deux atomes à sa position d'équilibre, on assimile localement le puit de potentiel à une parabole. En nommant a la distance entre les deux atomes à l'équilibre, on a $E_{pot} = A(r - a)^2 - E_{liaison}$ (avec $A > 0$), $E_{liaison}$ étant l'énergie d'interaction entre les deux atomes à l'équilibre, représentée par la profondeur du puit.

En invoquant $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}(E_{pot}) = -2A(r - a)\vec{u}_r$, on remarque que la force reliant les deux atomes est assimilable à celle d'un ressort, et que la constante A s'exprime en fonction de la raideur de ce ressort équivalent $A = k/2$.

On comprend alors pourquoi, pour décrire les petites déformations d'un solide, il est légitime de modéliser simplement le solide comme une mise en parallèle de chaînes d'atomes reliés par des ressorts. Cette modélisation explique de manière évidente la loi de Hooke.



En notant que la parabole (modélisant le puit de potentiel autour de l'équilibre) est telle que $E_{pot} \sim 0$ quand $r \sim 0$, on en déduit $E_{liaison} \sim \frac{1}{2}ka^2$.

On connaît par ailleurs l'ordre de grandeur de cette énergie d'interaction entre deux atomes $E_{liaison} \sim qq \text{ eV}$, ce qui nous donne un ordre de grandeur de la raideur k du ressort modélisant la force entre deux atomes.

On cherche à présent à utiliser cette modélisation pour estimer le module d'Young.

Il nous suffit pour cela de relier le module d'Young E (échelle macro) à la raideur k d'un ressort (échelle micro)

- ❖ Exprimer la section S du parallélépipède en fonction du paramètre de la maille cubique élémentaire a et du nombre N de chaînes dénombrables sur une section
- ❖ Exprimer la force subie par une seule chaîne à ses extrémités, puis expliquer pourquoi la norme de cette force est la même aux extrémités de tous les ressorts constitutifs de la chaîne
- ❖ Exprimer l'allongement d'un ressort $\Delta\ell$ de la chaîne en fonction de l'allongement total ΔL du bloc et du nombre p de ressorts constitutifs d'une chaîne
- ❖ En revenant à la définition de E , et en utilisant les relations précédentes, exprimer E en fonction de k et a
- ❖ En déduire une estimation de E à partir des ordres de grandeur de E_{pot} et a . Est-ce compatible avec la valeur donnée pour le Fer ?

3. Familles de solutions de l'équation de d'Alembert

L'équation de d'Alembert n'est pas vérifiée par toutes les ondes. Elle reste cependant intéressante car c'est la plus simple des équations permettant de décrire un phénomène de propagation réversible. Les familles de solution de cette équation peuvent aussi servir de bases pour résoudre des équations d'onde plus compliquées.

*L'équation étant **linéaire**, toute combinaison linéaire de solution est solution.*

3.1. Les ondes progressives

Les ondes progressives $s(x, t)$ s'écrivent comme la composée de deux fonctions

Onde qui progresse dans le sens de x croissants : $s(x, t) = f(x - ct)$ ou $f\left(t - \frac{x}{c}\right)$

Onde qui progresse dans le sens des x décroissants : $s(x, t) = f(x + ct)$ ou $f\left(t + \frac{x}{c}\right)$

On peut donc toujours écrire une onde progressive comme la composée de deux fonctions :

$$s(x, t) = f \circ \phi$$

- la fonction $\phi(x, t)$ est une fonction de l'espace et du temps et s'appelle **la phase de l'onde**
- la fonction f est une fonction d'une variable et donne l'amplitude de l'onde

C'est la valeur de la phase qui fixe l'amplitude de l'onde. La position x et l'instant t fixent la valeur de la phase.

La phase ϕ peut s'exprimer en mètre ou en seconde, c'est un choix arbitraire $\phi(x, t) = x - ct$ ou $t - \frac{x}{c}$

L'unité de l'amplitude f de l'onde dépend du phénomène étudié. Dans l'exemple de la corde, c'est un déplacement vertical : en mètre.

★ Vérifier que les quatre écritures données dans l'encadré sont bien solutions de l'équation de d'Alembert.

Solution générale de l'équation de d'Alembert (admis)

$$f(x - ct) + g(x + ct)$$

ou

$$f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

Illustration graphique (à savoir refaire)

L'onde progressive $s(x, t)$ se propage vers la droite. Son amplitude f est une « courbe à une bosse ». On choisit de définir la phase par $\phi(x, t) = x - ct$.

- ❖ Dessiner la fonction f en fonction de la variable ϕ . On note ϕ_{max} la valeur de la phase qui rend f maximale
- ❖ Dessiner une photo à un instant t_1 de l'onde $s(x, t_1)$. On note x_1 la position du max sur le dessin
- ❖ Exprimer la position x_1 du max en fonction de ϕ_{max} et t_1

Afin de superposer une photo de l'onde à un instant ultérieur ($t_2 > t_1$), on cherche la position x_2 la position du maximum de l'onde :

- ❖ Exprimer la position x_2 du max en fonction de ϕ_{max} et t_2 , puis en fonction de x_1 et $(t_2 - t_1)$
- ❖ Vérifier que ce dernier calcul prouve mathématiquement que l'onde se propage dans le sens des x croissants, et superposer la 2^e photo de l'onde à la 1^{ère}
- ❖ Expliquer pourquoi on peut ici qualifier la célérité c de « vitesse de phase »
- ❖ Sans refaire tout le raisonnement, expliquer que $g(x + ct)$ est progressive dans le sens des x décroissants

<http://ressources.univ-lemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/meca/ondeprog.html>

Ondes progressives vers l'avant ou l'arrière

*Une onde du type $f(x - ct)$ progresse vers l'avant selon les x croissants
Une onde du type $g(x + ct)$ progresse vers l'arrière selon les x décroissants*

3.2. Les ondes progressives harmoniques (ou monochromatiques)

Onde progressive harmonique

Une onde progressive est harmonique si son amplitude est une fonction sinusoidale de la phase :

$$\begin{array}{ll} f(\phi) = A \cos(\omega\phi + \varphi) & \text{si } \Phi \text{ temporelle} \\ f(\phi) = A \cos(k\phi + \varphi) & \text{si } \Phi \text{ spatiale} \end{array}$$

$A \cos(\varphi)$ étant alors l'amplitude de l'onde à l'origine de la phase ($\phi = 0$, donc en $x = 0$ à $t = 0$)

Si l'on considère une phase temporelle $\phi(x, t) = t - \frac{x}{c}$, ω est une pulsation temporelle (d'où la notation)

- ❖ Donner la période temporelle de l'onde, et sa fréquence, en fonction de la pulsation
- ❖ Montrer que l'OPH est aussi une fonction sinusoidale de l'espace. Comment nomme-t-on la période spatiale d'une OPH ?
- ❖ Donner sa pulsation spatiale, sa période spatiale, et sa fréquence spatiale

Si l'on considère une phase spatiale $\phi(x, t) = x - ct$, k est une pulsation spatiale (d'où la notation)

- ❖ Donner la période spatiale de l'onde, et sa fréquence, en fonction de la pulsation spatiale
- ❖ Montrer que l'OPH est aussi une fonction sinusoidale du temps
- ❖ Donner sa pulsation temporelle, sa période temporelle, et sa fréquence temporelle

Conclusion : quelle que soit la convention choisie, on trouve la même relation entre la pulsation temporelle et la pulsation spatiale. Pour une onde de d'Alembert, cette relation fait apparaître la célérité.

Expression mathématique d'une OPH

$$s(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi)$$

*Une OPH est **doublement périodique** : dans l'espace et dans le temps.
 ω est sa pulsation temporelle, k sa pulsation spatiale.*

Vocabulaire de la périodicité temporelle

La pulsation temporelle ω
La fréquence temporelle $f = \omega/2\pi$
La période temporelle $T = 2\pi/\omega$

Vocabulaire de la périodicité spatiale

La pulsation spatiale k s'appelle aussi la **norme du vecteur d'onde** $\vec{k} = k\vec{e}_x$
La fréquence spatiale $\sigma = k/2\pi$ s'appelle le **nombre d'onde**
La période spatiale $\lambda = 2\pi/k$ s'appelle la **longueur d'onde**

Remarque : Le vecteur d'onde \vec{k} est surtout utile pour décrire la propagation des ondes en 2D ou 3D. L'information supplémentaire (par rapport à k seul) donnée par le vecteur est la *direction et le sens* de propagation de l'onde (\vec{e}_x pour l'exemple unidimensionnel de la corde). En 3D, cela donne la direction et le sens de propagation de l'onde *en un point du front d'onde* uniquement (cf. prochains chapitres).

Intérêt de cette sous-famille de solutions (OPH)

Toute onde progressive **peut-être décomposée en somme d'OPH** (discrète ou continue, analyse de Fourier). Attention, une OPH n'est pas « physique », seule une somme continue d'OPH l'est. Les OPH sont un outil :

- on se donne ω
- on détermine k , en réinjectant l'expression de l'OPH dans l'équation d'onde
- on détermine A et φ en invoquant les conditions initiales et les conditions à la limite

3.3. Relation de dispersion – Vitesse de phase (OPH)

Relation de dispersion

C'est la relation entre les pulsations spatiale k et temporelle ω :
 $k(\omega)$ ou $\omega(k)$

On la **détermine en réinjectant les OPH dans l'équation d'onde** (en utilisant la notation complexe).
Tout comme l'équation d'onde, elle est déterminée par le milieu de propagation.

Définition de la vitesse de phase = vitesse d'une OPH

C'est la vitesse d'une OPH de pulsation temporelle ω :

$$v_{\varphi} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\omega}{k}$$

Cette vitesse est fixée par l'équation d'onde, et dépend donc du milieu de propagation.

Milieu dispersif

Un milieu est dit **dispersif** si la **vitesse de phase dépend de la pulsation** (temporelle ou spatiale).
Alors, un groupe d'OPH émis par une source finit toujours par se « disperser » au cours de sa propagation.

Ces définitions sont générales : elles ne dépendent pas du type de milieu, du type d'équation d'onde.

Méthode générale pour déterminer $k(\omega)$ puis v_{φ}

On écrit l'OPPH en complexe, puis on réinjecte dans l'équation d'onde.

Application aux ondes vérifiant d'Alembert

- ❖ Par analogie avec le cours de 1^{er}A, introduire la notation complexe en régime sinusoïdal forcé (OPH cpx)
- ❖ En réinjectant dans l'équation de d'Alembert (valable en cpx car *linéaire*), retrouver la relation entre k et ω
- ❖ En déduire la vitesse de phase dans le cas de l'équation de d'Alembert
- ❖ Donner les relations entre les grandeurs spatiales/temporelles suivantes : période, fréquence.

Remarque : il existe deux conventions pour l'introduction de la notation complexe : $j(\omega t - kx)$ ou $j(kx - \omega t)$. Dans un problème sur les ondes, une fois une convention choisie, il suffit de ne pas en changer.

Vitesse de phase d'une onde vérifiant l'équation de d'Alembert

*Pour une OPH vérifiant l'équation de d'Alembert : la vitesse de phase égale la célérité $v_\varphi = c$.
Si l'équation d'onde n'est pas celle de d'Alembert, ce résultat n'est plus valable.*

3.4. Les ondes stationnaires

Ondes stationnaires

*Pour résoudre l'équation de d'Alembert, on peut rechercher une solution aux variables séparées :
 $s(x, t) = f(x)g(t)$*

- ❖ Justifier le qualificatif « stationnaire ».
- ❖ Réinjecter cette famille de solutions dans l'équation de d'Alembert, et séparer les grandeurs dépendant de x de celles dépendant de t . Que peut-on dire de chacun des termes (temporel et spatial) de l'équation obtenue ?
- ❖ Deux cas se présentent : déterminer la solution $s(x, t)$ dans les deux cas.
- ❖ Montrer que les solutions exponentielles ne vérifient pas les conditions aux limites dans le cas d'une corde fixée à ses deux extrémités

Expression mathématique d'une OS harmonique

$$s(x, t) = A \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \psi)$$

*Les positions d'amplitude nulle s'appellent les **nœuds** de l'OS.
Les positions d'amplitude maximale s'appellent les **ventres** de l'OS.*

Point méthode : En général, on se donne ω ; puis on détermine k , en réinjectant l'expression de l'OSH dans l'équation d'onde ; et on détermine enfin A et ψ en invoquant les conditions initiales et les conditions à la limite

Exemple corde fixée aux deux extrémités, en régime libre (rappel PCSI)

- ❖ Dans le cas d'une corde fixée à ses deux bouts, déterminer graphiquement la relation que doit vérifier la longueur d'onde d'une OS pour vérifier les conditions à la limite
- ❖ En déduire une condition sur la fréquence

3.5. Lien entre les deux familles de solutions : OPH et OS

- ❖ A partir d'une formule de trigo, montrer qu'une OPH peut être décomposée en une somme d'OSH
- ❖ Procéder de la même façon pour montrer qu'une OSH peut être décomposée en une somme d'OPH

Pour visualiser des ondes stationnaires sur une corde, et visualiser aussi les deux OPH dont la somme donne la même onde stationnaire : <http://gilbert.gastebois.pagesperso-orange.fr/java/son/melde/melde.htm>

*Une OPH peut toujours être décomposée en une somme d'OSH.
Une OS peut toujours être décomposée en une somme d'OPH.
On choisit la famille de solutions la plus adaptée aux conditions aux limites.
En général (cas le plus fréquent), une onde est une somme d'OPH (ou d'OSH).*

4. Applications des ondes stationnaires à la corde vibrante

On s'intéresse ici aux vibrations d'une corde en régime permanent. Soit la corde est en régime libre, excitée par une impulsion (pincement/guitare, percussion/piano). Soit la corde est excitée sinusoidalement par un vibreur.

4.1. Modes propres d'une corde fixée à ses deux extrémités (régime libre)

On s'intéresse aux vibrations d'une corde en régime libre. L'équation d'onde est celle de d'Alembert, déterminée précédemment, d'après un modèle qui négligeait tout frottement, donc toute source d'atténuation de l'amplitude de l'onde. L'expérience et les conditions aux limites suggèrent de plutôt utiliser les solutions en OSH. La corde est fixée à ses deux extrémités, distantes de L .

- ❖ Donner la forme mathématique d'une OSH
- ❖ Appliquer les conditions aux limites, et déterminer les valeurs permises de ω et k
- ❖ Donner l'expression mathématique générale de l'onde totale en régime libre

*Les ondes stationnaires permises en régime libre s'appellent les **modes propres**.*

*Le mode $n = 1$ s'appelle le **mode fondamental**.*

*Le mode n s'appelle la **n^e harmonique***

- ❖ Dessiner les 4 premiers modes.

La solution générale est a priori une combinaison linéaire de tous les modes propres autorisés :

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos\left(n \frac{\pi c}{L} t + \varphi_n\right) \sin\left(n \frac{\pi x}{L}\right)$$

Remarque : Les coefficients A_n et φ_n de chaque terme de la série de Fourier sont déterminés par les conditions initiales, données en tout point de la corde : $y(x, 0)$ et $\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0)$

Complément culturel, notions de musique :

Une octave est l'intervalle de fréquence f , $2f$.

Deux notes à l'octave sonnent de manière semblable, aussi portent-elles le même nom ; on les différencie par un numéro d'octave placé en indice. Une octave est divisée en 12 demi-tons formée des notes successives :

DO-DO \leftrightarrow -RE-RE \leftrightarrow (appelé plutôt MI \wedge) -MI-FA-FA \leftrightarrow -SOL-SOL \leftrightarrow -LA-LA \leftrightarrow (appelé plutôt SI \wedge) -SI-DO

\leftrightarrow = dièse : élève la note d'un demi-ton ;

\wedge = bémol : abaisse la note d'un demi-ton.

Dans la gamme tempérée, deux demi-tons successifs ont un rapport de fréquence constant et égal à $2^{1/12}$.

La relation « nom-fréquence » nécessite une référence : le La₃ de fréquence $f = 440$ Hz.

Certains intervalles sonnent de manière plus harmonieuse que d'autres :

- l'octave ;
- la quinte correspondant à 7 demi-tons : exemple : do-sol $f_2 / f_1 = 2^{7/12} \approx 3/2$ (à 0,1 % près) ;
- la tierce majeure correspondant à 4 demi-tons : exemple : do-mi.

Un son musical n'est pas composé que d'une seule fréquence, mais comporte en général de nombreux harmoniques ; on le caractérise par 3 grandeurs :

- l'intensité, liée à l'amplitude des vibrations (reliée à la puissance sonore émise, puissance totale si plusieurs fréquences) ;
- la hauteur, liée à la fréquence fondamentale du son ;
- le timbre, lié au spectre du son.

4.2. Résonances sur la corde de Melde (régime sinus forcé)

On dispose une lame vibrante à l'extrémité gauche de la corde, capable d'exciter transversalement la corde en $x = 0$: $y(x = 0, t) = y_0 \cos(\omega_0 t)$. La corde est fixée en $x = L$. On cherche une solution sous forme d'OS.

- ❖ Donner la forme mathématique d'une OS solution de l'équation de d'Alembert
- ❖ Montrer que la pulsation de l'onde est égale à celle de l'excitation.
- ❖ Déterminer les autres paramètres de l'onde. Interpréter physiquement le résultat.

Lorsque la fréquence d'excitation est égale à celle d'un mode propre, il y a résonance.

Animations + manip :

- *Onde progressive et sa réflexion sur une grande corde attachée à un bout et excitée à la main*
- *Corde de Melde (résonance) : vérification expérimentale de l'expression de la célérité*

Le programme de physique des ondes de la classe de PC s'inscrit dans le prolongement de la partie « **Propagation d'un signal** » du thème « **Ondes et signaux** » du programme de PCSI où des propriétés unificatrices (interférences, battements, etc.) ont été abordées en s'appuyant sur une approche expérimentale et sans référence à une équation d'onde. Il s'agit désormais de mettre en place l'équation d'onde de d'Alembert en mécanique, en acoustique et en électromagnétisme. On aborde ensuite l'étude de la dispersion, de l'atténuation et de l'absorption associées à des phénomènes de propagation régis par des équations aux dérivées partielles linéaires à coefficients constants. La propagation d'ondes dans des milieux différents conduit naturellement à étudier la réflexion et la transmission d'ondes à une interface. L'étude de la physique des ondes s'achève par une introduction à la physique du laser et par une introduction à l'approche ondulatoire de la mécanique quantique.

La partie « **Phénomènes de propagation non dispersifs : équation de d'Alembert** » est consacrée à l'étude de phénomènes ondulatoires non dispersifs régis par l'équation d'onde de d'Alembert. Le choix a été fait ici de privilégier les solutions harmoniques dans la résolution pour leur universalité comme solutions adaptées aux équations d'ondes linéaires. S'agissant de la modélisation microscopique des solides, l'objectif est uniquement de proposer une interprétation du module d'Young d'un solide ; par la suite, la mise en équations des ondes longitudinales dans les solides est conduite directement dans l'approximation du solide continu. Dans le cadre de la physique des ondes, on qualifiera de plane ou sphérique une onde par référence à sa dépendance spatiale $f(x,t)$ ou $f(r,t)$.

Notions et contenus	Capacités exigibles
6.1. Phénomènes de propagation non dispersifs : équation de d'Alembert	
6.1.1. Ondes mécaniques unidimensionnelles dans les solides déformables	
Ondes transversales sur une corde vibrante.	Établir l'équation d'onde décrivant les ondes transversales sur une corde vibrante infiniment souple dans l'approximation des petits mouvements transverses.
Domaine d'élasticité d'un solide : module d'Young, loi de Hooke.	Exploiter le modèle de la chaîne d'atomes élastiquement liés pour relier le module d'Young d'un solide élastique à ses caractéristiques microscopiques.
Ondes mécaniques longitudinales dans une tige solide dans l'approximation des milieux continus.	Établir l'équation d'onde décrivant les ondes mécaniques longitudinales dans une tige solide.
Équation de d'Alembert ; célérité.	Identifier l'équation de d'Alembert. Relier qualitativement la célérité d'ondes mécaniques, la raideur et l'inertie du milieu support.
Ondes progressives, ondes progressives harmoniques ; ondes stationnaires.	Différencier une onde stationnaire d'une onde progressive. Utiliser qualitativement l'analyse de Fourier pour décrire une onde non harmonique.
Modes propres d'une corde vibrante fixée à ses deux extrémités. Résonances d'une corde de Melde.	Décrire les modes propres d'une corde vibrante fixée à ses deux extrémités. Interpréter quantitativement les résonances observées avec la corde de Melde en négligeant l'amortissement.