

# Mécanique – TD4 : Oscillations libres (harmoniques ou amorties)

## Exercice 1 : Unités

Cet exo ne sera pas corrigé en séance de TD. Je répondrai évidemment aux questions si vous en avez.

Déterminer les unités des expressions suivantes, et se souvenir à quoi ces formules correspondent dans le cours :

- $\sqrt{\frac{k}{m}}$   $k$  constante de raideur de ressort,  $m$  masse
- $2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$   $\ell$  est une longueur,  $g$  le champ de pesanteur
- $\frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2$
- $\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$   $L$  est une inductance,  $C$  une capacité

## Exercice 2 : Détermination d'un coefficient de viscosité (un dispositif similaire sera étudié en TP)

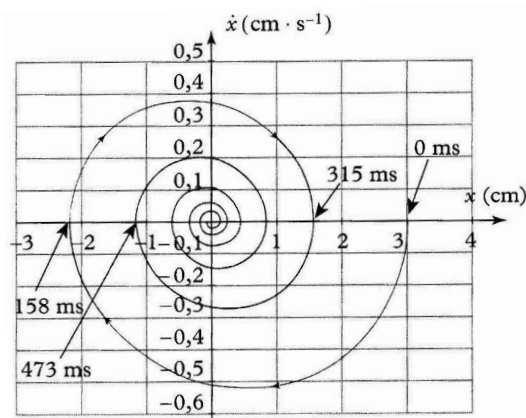
Une sphère de rayon  $r$  et de masse  $m$  est suspendue à un ressort vertical de raideur  $k$  et de longueur à vide  $l_0$ . Déplacée dans un liquide de coefficient de viscosité  $\eta$ , la sphère est soumise à une force de frottement fluide donnée par la formule de Stokes :  $\vec{f} = -6\pi\eta r\vec{v}$ , où  $\vec{v}$  est la vitesse de la sphère dans le liquide.

1. Ecrire l'équation du mouvement de la sphère plongée dans le liquide et en déduire l'expression de la pseudo-période  $T$ .
2. Dans l'air, où les frottements fluides sont négligeables, la période des oscillations est  $T_0$ . Déterminer le coefficient de viscosité  $\eta$  du liquide en fonction de  $m$ ,  $r$ ,  $T$  et  $T_0$ .

## Exercice 3 : Portrait de phase

On considère le portrait de phase d'un oscillateur harmonique amorti composé d'une masse  $m = 500 \text{ g}$  soumise à une force de rappel élastique (ressort de raideur  $k$ ) et à une force de frottement fluide (de coefficient  $h$ ).  $x$  est la coordonnée cartésienne repérant le mouvement.

1. Déterminer graphiquement la nature du régime de l'oscillateur.
2. Déterminer par lecture graphique :
  - la valeur initiale de la position
  - en quel point (à représenter sur un schéma du montage) a été fixé l'origine du repère cartésien pour repérer le mouvement ?
  - la pseudo-période
  - le décrément logarithmique



Pour la question suivante, on ne redémontrera pas les formules vues en cours (qui ne sont pas à connaître par cœur non plus, donc ayez vos notes de cours devant les yeux : chapitre 3 d'élec et chap. 5 de méca).

3. Comprendre les étapes de calculs (sans les faire) nécessaires pour déduire les valeurs des paramètres suivants :
  - le facteur de qualité (utiliser les formules entre  $\delta$  et  $\alpha$ , puis entre  $\alpha$  et  $Q$  du chapitre 3 d'élec)
  - la pulsation propre (utiliser formule de  $T$  en fonction de  $T_0$  et  $Q$ )
  - la raideur du ressort et le coefficient de frottement fluide

#### Exercice 4 : Portrait de phase d'un oscillateur non harmonique

Soit un oscillateur dont le mouvement est régi par l'équation différentielle suivante :

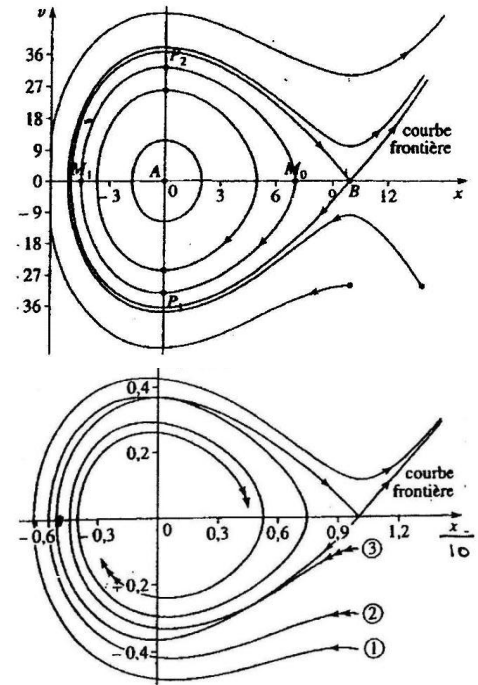
$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x(1 - px)$$

On représente son portrait de phase pour  $p = 0.1$ .

1. Que représentent les points A et B ?
2. Déterminer à partir de l'équation différentielle la fonction énergie potentielle  $E_p(x)$ . Tracer son allure, et identifier les points A et B sur le diagramme d'énergie potentielle.
3. Expliquer alors le premier portrait de phase (ci-contre).
4. L'oscillateur est maintenant régi par l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x(1 - px) - \omega_0 f \dot{x}$$

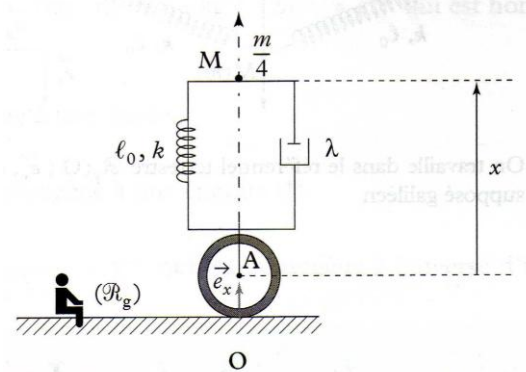
Que représente le terme supplémentaire introduit ? Discuter alors de l'allure du nouveau portrait de phase, obtenu pour  $p = 0.1$  et  $f = 0.1$ .



#### Exercice 5 : Amortisseur de voiture

On modélise l'amortisseur d'une voiture à l'aide d'un ressort de raideur  $k$  et de longueur à vide  $\ell_0$ , en parallèle avec un amortisseur de coefficient de frottement  $\lambda$ . Une masse  $m/4$  est posée sur ce dispositif et peut se déplacer verticalement le long de l'axe  $e_x$  lié au référentiel terrestre, supposé galiléen. La masse  $m/4$  représente la masse du véhicule de masse  $m$  pesant sur le système d'amortisseur.

1. Lors du changement d'une roue on soulève d'une hauteur  $h = 25$  cm la carcasse du véhicule, ce qui correspond au moment où la roue (de masse négligeable) ne touche plus le sol : la longueur AM (longueur du ressort) vaut alors 40 cm. Déterminer les caractéristiques du ressort.
2. Déterminer et calculer  $\lambda$  afin que le dispositif fonctionne en régime critique (roue sur le sol à l'arrêt et masse  $m/4$  en mouvement vertical)
3. On enfonce la masse  $m/4$  d'une hauteur  $d = 5$  cm et on lâche le système à  $t = 0$  sans vitesse initiale. Déterminer l'évolution de l'altitude  $x$  de la masse  $m/4$ .



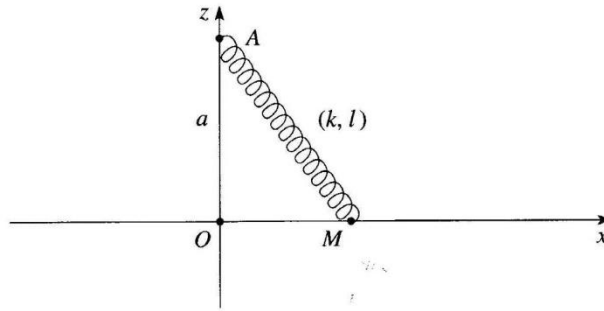
#### Exercice 6 : Oscillateur amorti

On considère les petites oscillations autour de l'équilibre d'une masse  $m = 100$  g accrochée à un ressort horizontal de constante de raideur  $k = 20$  N.m<sup>-1</sup>. La masse n'est soumise à aucun frottement solide de la part du support horizontal sur lequel elle évolue. Par contre, la masse est soumise à une force de frottement fluide, de coefficient de frottement  $h = 2$  kg.s<sup>-1</sup>.

1. Ecrire l'équation différentielle vérifiée par  $x$ , coordonnée qui repère le mouvement par rapport à la position d'équilibre.
2. Montrer que le régime est pseudopériodique. Etablir alors l'expression de la pseudopériode des oscillations.
3. Evaluer la durée caractéristique du régime

### Exercice 7 : Autre pendule élastique

Déterminer la période  $T_0$  des petites oscillations d'un point matériel  $M$  de masse  $m$ , assujéti à se déplacer sans frottement sur une droite horizontale, sous l'action d'un ressort  $(k, l_0)$  dont l'autre extrémité est fixe en  $A$  de cote  $a > l_0$ . On notera que « petites oscillations » signifie que  $x \ll a$ .



On utilisera le TEM afin d'établir l'équation différentielle de l'oscillateur. On utilisera aussi le développement limité suivant, valable pour  $x$  proche de 0 :  $(1+x)^m = 1+mx$ , où  $m$  est un réel.

### Exercice 8 : Oscillateur amorti

On considère un oscillateur harmonique amorti de pulsation propre  $\omega_0 = 100 \text{ rad.s}^{-1}$  et de facteur de qualité  $Q = 10$  ; la masse  $m = 100 \text{ g}$  de cet oscillateur est lâchée avec un écart à la position d'équilibre de  $x_0 = 10 \text{ cm}$  sans vitesse initiale.

Calculer :

- la pseudo-période
- le décrétement logarithmique
- l'amplitude des oscillations au bout de 2, 5 et 10 pseudopériodes. On démontrera auparavant que 
$$n\delta = \ln\left(\frac{x(t)}{x(t+nT)}\right), n \text{ étant un entier.}$$
- l'énergie mécanique initiale
- l'énergie mécanique au bout de 2, 5 et 10 pseudopériodes. On remarquera que l'on calcule l'énergie mécanique aux maxima du mouvement (où l'énergie cinétique est nulle). A ces instants-là, l'énergie mécanique dépend uniquement de l'amplitude. On utilisera donc le décrétement logarithmique.