Bilans macroscopiques Chap.3 –
Bilans de quantité de mouvement et de moment cinétique

Intro :
La méthode des bilans macroscopiques a été utilisée au chapitre précédent dans le cas de *l'énergie*. Elle nous a permis d'obtenir une expression du premier principe (et du deuxième) très simple dans le cas stationnaire. En ajoutant les hypothèses PHI, on en a tiré la relation de Bernoulli.

Si les effets thermiques sont laissés de côté, on effectue des bilans d'énergie mécanique. On en fera encore dans le présent chapitre (et en TD).

Pour étudier complètement un dispositif, un bilan d'énergie ne suffit pas toujours, et il faut lui associer d'autres types de bilans : les bilans de *quantité de mouvement* et de *moment cinétique*. Ce sont des bilans de grandeurs extensives *vectorielles*, mais cela ne modifie pas la méthode. Sauf si une projection s'avère vraiment nécessaire, on gardera les vecteurs tout le long de la méthode vue au chapitre 1.

1. Bilan de quantité de mouvement

1.1. Résultante nulle des forces de pression sur une surface fermée si pression uniforme

Lorsqu'un système est entouré par un fluide de pression **uniforme**, *la* **résultante des forces de pression est nulle**.

On admet ce résultat. On peut vérifier sur un schéma qu'à chaque force exercée sur une surface élémentaire, on peut trouver une seconde surface élémentaire parallèle à la première et sur laquelle la force sera de même direction et de sens opposé à la première.

1.2. Force exercée par l'écoulement sur une conduite de section variable

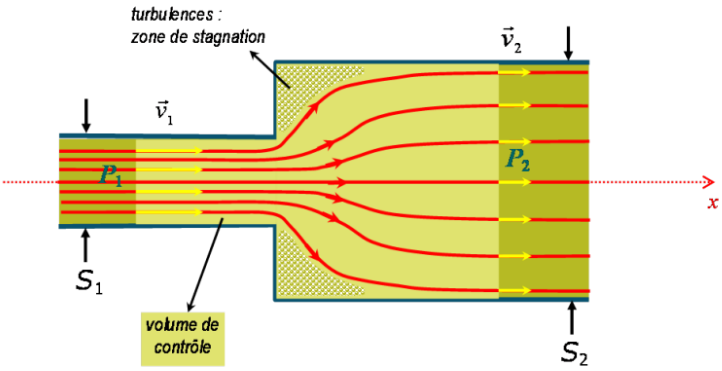
Soit un écoulement stationnaire de fluide parfait et incompressible dans une canalisation à symétrie cylindrique, d'axe Ox, dont la section passe de S_1 à S_2. On néglige la pesanteur. La vitesse du fluide dans la section S_1 est V_1 et sa pression P_1.
En faisant un bilan de quantité de mouvement sur un système bien choisi, déterminer la composante sur Ox de la force exercée par le fluide sur la canalisation en fonction de S_1, S_2 , V_1 et P_1.

Réponse : $F = P_1(S_1-S_2) - \frac{1}{2}\rho V_1^2 S_1\left(\sqrt{\frac{S_1}{S_2}} - \sqrt{\frac{S_2}{S_1}}\right)^2$

En prenant des valeurs numériques raisonnables, repérer quel terme est principalement responsable de la force du fluide sur la canalisation.

1.3. Perte de charge singulière due à un élargissement brutal de section

Via quelques hypothèses simplificatrices, on va établir une expression approximative du coefficient de perte de charge singulière dans le cas d'un élargissement brutal de la section d'une conduite. Le dessin ci-dessous illustre

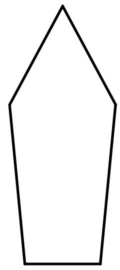


l'existence d'une « zone de stagnation » à l'intérieur de laquelle l'eau est quasiment immobile, et où l'on admettra que la pression vaut environ P_1 (i.e. la pression en amont)

- En effectuant un bilan de quantité de mouvement, déterminer l'expression du coefficient K de perte de charge. Vous pourrez vérifier que c'est presque l'expression donnée dans l'annexe du chapitre précédent.

Pourquoi le changement de section brutal provoque-t-il une perte de charge ?
Tentative d'explication : La zone de stagnation favorise la dissipation d'énergie mécanique par viscosité, même dans un écoulement à grand nombre de Reynolds. Au niveau du changement de section, lorsqu'une turbulence dévie le fluide de sa trajectoire moyenne, de l'énergie mécanique est déviée vers la zone de stagnation et y reste piégée jusqu'à être dissipée.

1.4. Origine physique de la force de propulsion d'une fusée



Hypothèses :
- la fusée éjecte les gaz brûlés avec un débit constant $\boldsymbol{D_m}$
- la vitesse (en norme) des gaz brûlés est $\boldsymbol{u}$ par rapport à la fusée
- on néglige tout frottement

- Quelles sont les forces connues qui agissent sur la fusée ?

Pourtant la fusée monte… L'objectif est d'identifier l'origine physique de la « force de poussée ». On va montrer que c'est une *pseudo-force* qui apparaît lorsque l'on « généralise » le TQM à un système ouvert.

- En effectuant un bilan de quantité de mouvement, projeté suivant la verticale et dans le référentiel galiléen, montrer que l'on peut écrire que le système ouvert {fusée + tout ce qu'elle contient} vérifie une *équation similaire au TQM* dans lequel apparaît un terme homogène à une force : la poussée.

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{ext} + \vec{F}_{pous}$$

1.5. Poiseuille cylindrique en régime laminaire

Il est possible de traiter l'écoulement de Poiseuille cylindrique en régime laminaire à partir d'un bilan de quantité de mouvement. On rappelle que l'écoulement est unidirectionnel et invariant par rotation autour de l'axe du cylindre. L'écoulement est supposé incompressible et homogène. On considère une portion de conduite de longueur L, de rayon R. En amont, la pression vaut P_1 et en aval $P_2 < P_1$.

- Compte-tenu des hypothèses, donner la forme mathématique du champ des vitesses.
- Définir sur un schéma le système ouvert constitué par le cylindre plein de rayon r de longueur L
- En procédant à un bilan de quantité de mouvement sur un système fermé bien choisi, montrer que sa quantité de mouvement ne varie pas
- En déduire l'expression du champ des vitesses

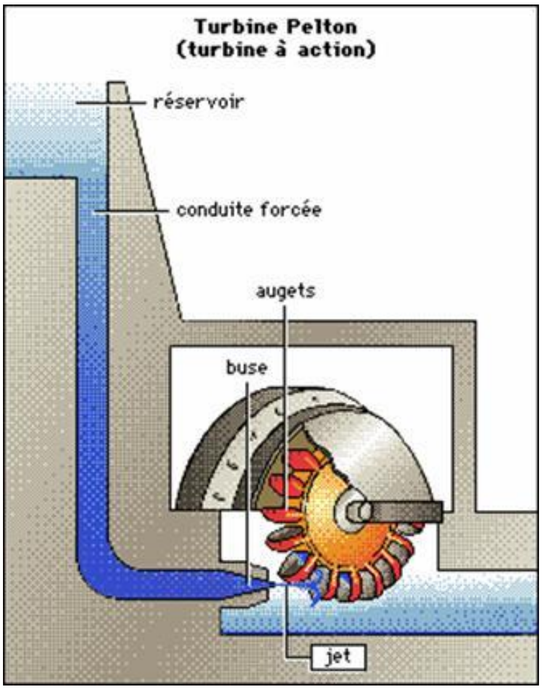
On peut traiter de même Couette plan et Poiseuille plan.

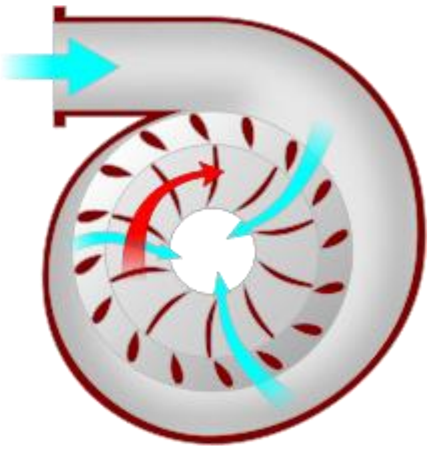
2. Bilan de moment cinétique sur une turbine Pelton

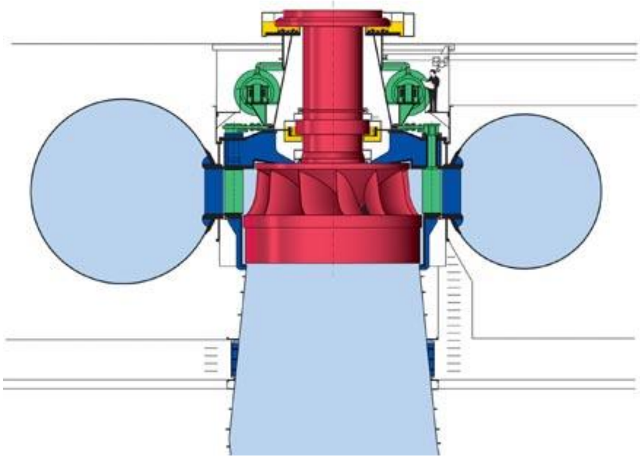
2.1. Les différentes turbines hydroélectriques

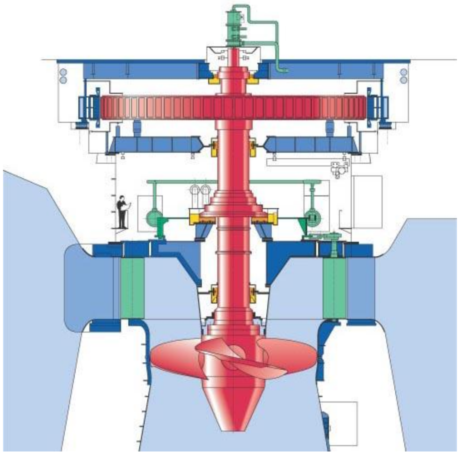
Il existe trois grands types de turbines hydroélectriques, chacune étant appropriée à une certaine configuration de barrage :

- la turbine ***Pelton*** : constituée d'une roue à augets. C'est une turbine à action, elle nécessite un injecteur transformant la pression en énergie cinétique d'un jet. Adaptée à de grandes hauteurs de chute
- la turbine ***Francis*** : constituée d'une roue à aube (type moulin à eau, symbole de la ville de Mulhouse). C'est une turbine à réaction, ne nécessitant pas d'injecteur : elle provoque une chute de pression entre l'amont et l'aval. Adaptée à des hauteurs de chute moyenne et de forts débits
- la turbine ***Kaplan*** : constituée d'une hélice (type celle des bateaux). C'est une turbine à réaction comme la turbine Francis. Adapté aux faibles hauteurs de chute et forts débits

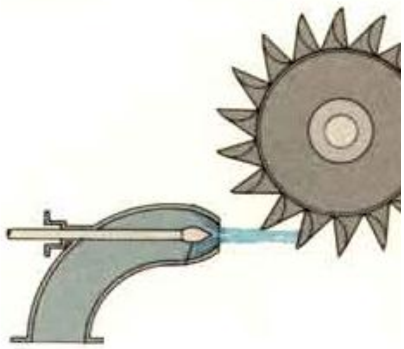








Les images sont tirées des sites ci-dessous :
http://www.hydroquebec.com/comprendre/hydroelectricite/types-turbines.html
http://fr.wikipedia.org/wiki/Turbine_hydraulique



2.2. Etude de la turbine Pelton

On fera les hypothèses suivantes :

- la turbine est reliée à un alternateur, exerçant un couple résistant $\Gamma < 0$ par rapport à l'axe de rotation
- pendant une durée dt, l'auget touché par le fluide est considéré en translation horizontale (revient à confondre l'arc de cercle avec sa tangente)
- le point d'impact du jet sur la turbine se fait à une distance a de l'axe de rotation
- le centre de gravité de la roue est sur l'axe de rotation. La masse d'eau du système fermé choisi est négligeable devant la masse totale du système
- on considère que le jet sortant de l'auget reste dans le plan de la roue, et est dirigé selon la même direction que le jet incident. Son sens est a priori inconnu.

On notera $\overrightarrow{v_2} = v_2\,\overrightarrow{u_x}$ la vitesse de l'eau à la sortie de l'auget dans le référentiel terrestre. L'axe $\overrightarrow{u_y}$ est pris dans le sens du vecteur rotation de la roue.

- ➢ Quel est le signe de v_2 si le jet sortant est de sens inverse au jet incident ? Le dessiner ainsi par la suite

- ➢ Effectuer un bilan de moment cinétique sur le système fermé constitué de la roue + les augets + le fluide à proximité de la roue. Le débit massique et la vitesse incidente du jet dans le référentiel terrestre sont connus. L'objectif est d'obtenir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse angulaire $\omega(t)$ de la turbine :
$$J\frac{d\omega}{dt} + D_m a(v_2 - v_1) = \Gamma$$

- ➢ Effectuer à présent un bilan d'énergie cinétique. On négligera encore la masse d'eau par rapport à la masse de la turbine. En déduire :
$$\frac{d\omega}{dt} + \frac{2D_m a^2}{J}\omega = \frac{\Gamma + 2D_m a v_1}{J}$$

3. Bilans de quantité de mouvement et de moment cinétique	
Loi de la quantité de mouvement pour un système fermé.	Faire l'inventaire des forces extérieures. Effectuer un bilan de quantité de mouvement.
Loi du moment cinétique pour un système fermé.	Effectuer un bilan de moment cinétique pour une turbine.