Mecaflu chap.0 – Statique des fluides (révisions + nongal)

1. Notions mathématiques nécessaires à la mécanique des fluides

1.1. Différentielle d'une fonction scalaire à une variable – Interprétation physique

La différentielle d'une fonction est une notion qui est précisément définie en mathématiques. Dans ce chapitre de physique, on cherchera juste à la comprendre de manière à en proposer une interprétation physique (par exemple, pour nous, pas d'intérêt particulier à distinguer l'opérateur et le résultat de cet opérateur).

On considère une fonction scalaire à une variable *f(t)*. Pour faciliter l'interprétation physique de la notion de différentielle, on considère que f est une grandeur physique qui dépend uniquement du temps t. Tout ce qui sera dit est aussi valable si c'est une fonction d'une coordonnée spatiale.

- $\boldsymbol{dt}$ est une durée *infinitésimale*, i.e. *infiniment petite*. On dit aussi ***durée élémentaire***.
- $df \overset{\text{def}}{=} f(t+dt) - f(t)$ est la ***variation élémentaire*** de la fonction pendant la durée élémentaire dt
  df est la différentielle de f
- Ces deux quantités élémentaires sont liées par la relation :
  $$\boldsymbol{df = \frac{df}{dt}dt} \qquad \text{ou avec la notation des math} \qquad \boldsymbol{df = f'dt}$$
- La ***variation*** $\Delta f \overset{\text{def}}{=} f(t_0+\Delta t) - f(t_0)$ de la fonction pendant la durée Δt est *la* ***somme des variations élémentaires*** df sur cette durée :
  $$\Delta f = \int_{durée\ \Delta t} df = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} f'dt$$

1.2. Différentielle d'une fonction *vectorielle* à une variable – Interprétation physique

L'interprétation physique de la différentielle d'une fonction vectorielle à une variable est similaire. Prenons un exemple concret : le vecteur position d'un point matériel *M*. C'est une grandeur vectorielle qui ne dépend que du temps : $\overrightarrow{OM}(t)$.

- dt représente une durée élémentaire
- $d\overrightarrow{OM} \overset{\text{def}}{=} \overrightarrow{OM}(t+dt) - \overrightarrow{OM}(t)$ représente ***la variation élémentaire*** du vecteur $\overrightarrow{OM}$ pendant la durée élémentaire dt. On parle aussi du ***déplacement élémentaire*** du point M.
  $d\overrightarrow{OM}$ est la différentielle de $\overrightarrow{OM}(t)$
- Ces deux variations sont liées par la relation suivante, qu'il faut savoir interpréter sur un schéma :
  $$\boldsymbol{d\overrightarrow{OM} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}dt} \qquad \text{ou d'après la définition de } \vec{v} \qquad \boldsymbol{d\overrightarrow{OM} = \vec{v}dt}$$
- En projetant ces relations dans le repère d'étude, on peut exprimer les composantes du vecteur $\overrightarrow{dOM}$ en fonction des coordonnées du point M.

❖ Exprimer les projections du déplacement élémentaire dans les trois systèmes de coordonnées
❖ En déduire les expressions des surfaces élémentaires et volumes élémentaires pour ces trois systèmes

1.3. Différentielle d'une fonction de plusieurs variables

Ce qui est dit ici est valable que la fonction soit scalaire ou vectorielle. On prendra le cas de fonctions dépendant des coordonnées d'espace $f(M)$, dans le système de coordonnées cartésien : $f(x,y,z)$. On notera qu'en général en physique de telles fonctions dépendent aussi du temps (quatre variables *indépendantes*).

Remarque : En physique, les grandeurs définies en tout point M d'un domaine de l'espace s'appellent des ***champs*** : ***champ scalaire*** si ces fonctions sont des nombres (pression, température) ou ***champ vectoriel*** si elles sont des vecteurs (champ magnétique, gradient de température).

Remarque : Ci-dessous on notera $\vec{r}(x,y,z)$ le vecteur position d'un point M quelconque de l'espace. Ce vecteur est défini par $\vec{r} \overset{\text{def}}{=} \overrightarrow{OM}$ une fois que l'origine O d'un repère a été définie. A ce titre, on notera que les notations suivantes sont toutes équivalentes : $f(M)$, $f(\vec{r})$, $f(\overrightarrow{OM})$, ainsi que $f(x,y,z)$ dans le système cartésien.

- $\overrightarrow{dr}$ est un déplacement élémentaire (noté parfois $\overrightarrow{d\ell}$). En cartésien : $\overrightarrow{dr} = dx\,\overrightarrow{u_x} + dy\,\overrightarrow{u_y} + dz\,\overrightarrow{u_z}$
- $\boldsymbol{df \overset{\text{def}}{=} f(\vec{r} + \overrightarrow{dr}) - f(\vec{r})}$ que l'on peut aussi écrire $\boldsymbol{df \overset{\text{def}}{=} f(x+dx, y+dy, z+dz) - f(x,y,z)}$ représente *la variation élémentaire* du champ $f(\vec{r})$ au cours du déplacement élémentaire $\overrightarrow{dr}$.
- Cette variation est reliée aux projections du déplacement élémentaire par la relation suivante :
$$\boldsymbol{df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz}$$

Remarque :

- La variation « totale » du champ f est la somme des variations partielles de f causées par la variation de chaque coordonnée indépendamment les unes des autres
- On vérifiera bien sur cette formule que les termes sont tous homogènes (même dimension)

Théorème de Schwarz *(admis)*

Pour les fonctions à plusieurs variables qu'on utilisera en physique,
l'ordre de dérivation n'a pas d'importance *pour calculer les dérivées partielles d'ordre supérieur à un.*

1.4. Opérateurs d'analyse vectorielle

L'opérateur « nabla » n'est utile que pour mémoriser facilement les définitions des opérateurs d'analyse vectorielle nécessaires au physicien.

Définition de l'opérateur nabla

$$\vec{\nabla} \overset{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Exemple avec le gradient, défini comme nabla appliqué au champ scalaire f :

<u>Définition du gradient d'un champ scalaire</u>

$$\overrightarrow{grad}(f) \stackrel{\text{def}}{=} \vec{\nabla}(f) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix}$$

- Exprimer la différentielle d'un champ scalaire (la température par exemple) en fonction de son gradient et du déplacement élémentaire.
- Retrouver ainsi l'interprétation physique d'un gradient de température

Autre exemple de l'utilisation de l'opérateur « nabla » pour mémoriser la définition de la divergence (resp. du rotationnel) d'un champ vectoriel (opérateurs que l'on utilisera dans des chapitres ultérieurs) :

<u>Définition de la divergence d'un champ vectoriel</u>

$$div(\vec{V}) \stackrel{\text{def}}{=} \vec{\nabla} \cdot \vec{V} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

<u>Définition du rotationnel d'un champ vectoriel</u>

$$\overrightarrow{rot}(\vec{V}) \stackrel{\text{def}}{=} \vec{\nabla} \wedge \vec{V}$$

2. <u>Description d'un fluide à l'échelle mésoscopique</u>

2.1. <u>Trois échelles de description possibles</u>

Dans le cours de mécanique des fluides, on ne sera amené qu'à étudier des systèmes macroscopiques, c'est-à-dire constituer d'un grand nombre de molécules (ou d'atomes).

Parler de molécules et d'atomes consiste à décrire la matière à ***<u>l'échelle microscopique</u>***. C'est une *modélisation discrète* de la matière (par opposition à *modélisation continue*), à l'échelle du nm. Or on comprend aisément que l'étude d'un fluide ne peut pas consister à déterminer le mouvement de chacune de ses molécules. Non seulement ce serait impossible techniquement, mais on ne saurait que faire de toute cette information.

C'est pourquoi en mécanique des fluides, on ne va s'intéresser qu'aux propriétés macroscopiques des systèmes étudiés. L'échelle de description que l'on va adopter est donc ***<u>l'échelle macroscopique</u>***. A cette échelle, on va adopter une *<u>modélisation continue</u>* de la répartition de matière, comme si la matière n'était pas constituée d'atomes, mais emplissait tout l'espace.

Souvent, les grandeurs définies localement (vitesse du fluide, masse volumique) n'ont pas nécessairement la même valeur partout dans le fluide. C'est pourquoi on les définit à l'échelle mésoscopique.

On l'appelle ***<u>l'échelle mésoscopique</u>*** (échelle de l'ordre du μm):
- assez grande devant l'échelle micro. pour adopter une *modélisation <u>continue</u> de la matière*
- assez petite devant l'échelle macro. pour considérer ces grandeurs *<u>localement uniformes</u>*

<u>Remarque</u> : On peut préciser ce que l'on entend par 'grand devant l'échelle microscopique'. Les molécules du fluide se déplacent et s'entrechoquent au hasard. En suivant une molécule, on peut s'intéresser à son *libre*

parcours moyen, i.e. la distance moyenne parcourue entre deux chocs. Si l'échelle mésoscopique choisie est grande devant le libre parcours moyen des molécules, alors cette échelle peut bien être considérée comme 'grande devant l'échelle microscopique'.

2.2. Lien intégral entre l'échelle mésoscopique et l'échelle macroscopique

A l'échelle mésoscopique, on évitera d'écrire des rapports de grandeurs. Dans le cas particulier de la masse volumique, on la définit par l'écriture suivante :

*La **masse volumique ρ** est définie en un point M du système par la relation :*

$$dm \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\rho(M)}\, d\tau$$

On passe de l'échelle mésoscopique *(écritures locales)* à l'échelle macroscopique *(écritures intégrales)* grâce aux intégrales.

Relation masse totale / masse volumique

La masse m_{tot} d'un corps de volume V est *la somme des masses élémentaires dm de chacune de ses parties*

$$m_{tot} = \iiint_V dm$$

$$m_{tot} = \iiint_{M \epsilon V} \rho(M) d\tau$$

2.3. Notations infinitésimale à l'échelle mésoscopique

Les quantités qui sont infinitésimales car définies pour un système mésoscopique (comme dm, dS, $d\tau$, $\overrightarrow{dF}$, etc.) peuvent se noter avec un "d" (dé droit) ou un "δ" (delta). On trouve les deux dans les livres et aux concours. L'interprétation physique usuelle du "d"– « variation élémentaire » – n'est alors pas utile-nécessaire-intéressante.

Il arrive que l'on rencontre les notations $\delta^3\tau$, d^1m, etc. L'exposant représente simplement « l'ordre » de l'infiniment petit. Un volume infiniment petit selon ses trois dimensions est un « triplement » petit ! Mais il peut n'être que d'ordre 2 si une de ses dimensions est macro. On n'utilisera pas ces notations dans le cours.

2.4. Gaz et liquides : masse volumique et compressibilité

On donne ici quelques ordres de grandeur qui permettent de faire la distinction entre les liquides et les gaz.
Dans les conditions ordinaires de pression et de température :

- masse volumique ρ : air 1,3 $kg.m^{-3}$ / eau $10^3 kg.m^{-3}$
- (Hors Programme) compressibilité isotherme χ_T : air $10^{-5}\ Pa^{-1}$ / eau 5 $10^{-10}\ Pa^{-1}$

$$\boldsymbol{\rho_{air} \sim 1,3\ kg.m^{-3}}$$

$$\boldsymbol{\rho_{eau} \sim 10^3 kg.m^{-3}}$$

Définition d'un fluide incompressible

*Un fluide **incompressible** est un fluide dont le **volume ne varie pas** sous l'effet d'une **variation de pression**.*

Définition d'un fluide indilatable

*Un fluide **indilatable** est un fluide dont le **volume ne varie pas** sous l'effet d'une **variation de température.***

L'incompressibilité est une approximation adaptée à l'étude des liquides dans les conditions usuelles. Les liquides usuels sont plus facilement incompressibles qu'indilatables.

3. Forces agissant sur un fluide au repos

Dans cette partie, il est surtout question « d'écriture »… Les idées physiques sont simples, mais il faut savoir les écrire sous forme mathématique. Si une formule vous est donnée, il faut savoir en extraire l'information physique pertinente.

3.1. Pression au sein d'un fluide – Pression à l'interface entre deux fluides

*La **pression** **P** **exercée par un fluide sur une surface** **dS** est définie par la relation :*

$$d\vec{F} = \pm \boldsymbol{P}\, \overrightarrow{dS}$$

P *en* Pa *(pascals ou* $N.m^{-2}$*)*

Pour bien comprendre cette définition, un schéma EST INDISPENSABLE :

- la force élémentaire $d\vec{F}$ est exercée *par* le fluide *sur* la surface élémentaire d'aire dS
- la surface élémentaire est orientée sur un schéma grâce au vecteur normal $\vec{n}$: $\overrightarrow{dS} = dS\,\vec{n}$
- le signe $\pm$ dépend de cette convention d'orientation, la force de pression ***pousse*** toujours et l'on écrit le signe de manière à ce que P soit > 0
- autres unités de pression : $1\ bar = 10^5 Pa$, $760\ mmHg = 1\ bar$

Remarque : On admettra que la pression est définie en tout point d'un fluide. Pour se représenter concrètement ce que cela signifie, il faut imaginer une surface élémentaire à l'intérieur du fluide, et considérer que le fluide situé d'un côté pousse sur le fluide situé de l'autre côté.

Remarque : On fera rarement référence à l'origine microscopique des forces de pression. On retiendra simplement que la force exercée par le fluide sur une surface élémentaire est due aux chocs des molécules (« pression cinétique ») et aux interactions entre molécules (« pression moléculaire »).

Pour mesurer la pression en un point d'un fluide au repos, on peut placer un manomètre en ce point du fluide. On remarque alors que *la norme de la force mesurée par la surface du manomètre (donc la pression) est indépendante de l'orientation de cette surface*. C'est bien pour cela que la pression est représentée par un scalaire, et non par un vecteur. A l'échelle microscopique, cette propriété s'explique du fait de l'isotropie du mouvement des molécules dans le fluide. Quelle que soit l'orientation de la surface, le nombre et l'intensité des chocs des molécules sur la surface restent les mêmes.

Enfin, on admettra que la *pression est continue à la traversée d'une interface* entre deux fluides. Ce n'est vrai que si l'on peut négliger le phénomène de tension superficielle (hors programme). Ce sera toujours le cas pour nous (interfaces planes, ou peu courbées, situations où la tension superficielle est négligeable).

*La pression est une **grandeur intensive**, i.e. définie en tout point d'un fluide.*
*La norme de la force exercée par le fluide est **indépendante de l'orientation** de la surface considérée.*
*La pression est **continue à l'interface entre deux fluides**.*

3.2. Force de pesanteur volumique

On considère un système mésoscopique de fluide : un volume élémentaire $d\tau$.

- ❖ Donner l'expression de la force (élémentaire) de pesanteur $d\overrightarrow{F_g}$ appliquée au système
- ❖ A partir de cette expression, définir $\overrightarrow{f_g}$ la force de pesanteur par unité de volume, en la reliant à $d\overrightarrow{F_g}$ et $d\tau$
- ❖ En déduire l'expression de $\overrightarrow{f_g}$ en fonction de ρ et $\vec{g}$

3.3. Equivalent volumique des forces de pression

- ❖ Donner l'expression de l'équivalent volumique de la force totale de pression appliquée à un volume élémentaire de fluide
- ✪ Comment démontre-t-on cette expression ?

4. Statique des fluides dans le champ de pesanteur uniforme (réf. galiléen)

« Statique des fluides » signifie que l'on va étudier les propriétés des fluides à ***l'équilibre mécanique***. Les fluides seront donc étudiés ***au repos*** dans le référentiel galiléen d'étude. Le champ de pesanteur sera toujours supposé uniforme.

On notera que dans le cadre de ce chapitre, on ne s'intéressera pas aux phénomènes thermiques, et la température sera ici une variable d'intérêt secondaire.

4.1. Relation fondamentale de la statique des fluides dans le champ de pesanteur

- ❖ En écrivant que la somme des forces appliquées à un volume élémentaire de fluide est nulle, établir la relation fondamentale de la statique des fluides.

Relation fondamentale de la statique des fluides

$$-\overrightarrow{\boldsymbol{grad}}(\boldsymbol{P}) + \boldsymbol{\rho}\vec{\boldsymbol{g}} = \vec{\boldsymbol{0}}$$

- ❖ En déduire que la pression ne dépend que de l'altitude (et pas d'un déplacement horizontal)

Fluide au repos dans le référentiel terrestre, $\vec{g}$ uniforme, P est une ***fonction de l'altitude uniquement***

Remarque : Une ***surface isobare*** est définie comme le lieu des points de même pression. On vient de montrer que ces surfaces isobares sont des *plans horizontaux*.

Le champ de pesanteur étant supposé uniforme à l'échelle du fluide, deux grandeurs physiques sont des fonctions de la position dans l'équation établie : la pression P et la masse volumique ρ. Pour pouvoir déterminer la pression et la masse volumique en tout point du fluide, il nous manque une équation.

- ❖ A quelle équation (thermodynamique) va-t-on faire appel ?

4.2. Comment redémontrer très vite la relation fondamentale de la statique des fluides

S'il faut redémontrer la RFS, sans utiliser par cœur les expressions des forces volumiques :

- ❖ On dessine une tranche élémentaire de fluide, une tranche très fine de dimensions latérales quelconques
- ❖ On remarque que la pression ne peut être qu'une fonction de l'altitude (invariance par translation horizontale)
- ❖ On finit avec une RFD projetée selon la verticale

5. Application à un fluide incompressible et homogène (réf. galiléen)

5.1. Définition d'un fluide incompressible et homogène

Définition fluide homogène

Un fluide est dit ***homogène*** s'il est constitué ***d'une seule phase***.

On a déjà vu la définition de l'incompressibilité d'un fluide. Or il y a deux façons de faire varier la masse volumique d'un corps homogène : en jouant sur la pression (compression) ou sur la température (dilatation). Les effets thermiques n'étant pas considérés dans les chapitres de mécanique des fluides (sinon on ajoute l'hypothèse « indilatable »), et le fluide étant incompressible… la masse volumique du fluide n'a aucune raison de varier dans l'espace et dans le temps ! L'équation d'état de ce type de fluide est donc $V = C^{te}$, équivalent à $\rho = C^{te}$.

<u>Fluide incompressible (indilatable) et homogène</u>

En tout point M du fluide et à tout instant : $\boldsymbol{\rho(M,t) = C^{te}}$
C'est le modèle que l'on choisira systématiquement pour décrire les **LIQUIDES**.

5.2. La pression varie linéairement avec l'altitude dans un liquide

<u>Variation linéaire de P avec l'altitude dans un liquide</u>

En considérant une colonne de fluide de hauteur h,
la pression en bas P_{bas} est égale à la pression en haut P_{haut} + le poids de la colonne par unité de surface :

$$\boldsymbol{P_{bas} = P_{haut} + \rho g h}$$

<u>Remarque</u> : Conséquence = *Théorème de Pascal :* « une modification $\Delta P(M_1)$ de la pression en un point M_1 du fluide (due à un facteur extérieur) se répercute en tout point M_2 du fluide : $\Delta \mathrm{P}(\mathrm{M}_2) = \Delta \mathrm{P}(\mathrm{M}_1)$ ». C'est sur cette idée que repose le principe d'une presse hydraulique

6. Application à un fluide compressible : cas de l'atmosphère (réf. galiléen)

6.1. Modèle simple de l'atmosphère isotherme

Comme précédemment, on suppose que la pesanteur est uniforme. Même en considérant un système aussi étendu que l'atmosphère (90% de la masse d'air dans les 10 premiers km), cette hypothèse reste valable compte tenu de la faible variation du champ de pesanteur à cette échelle.

L'air n'est pas un corps pur. Il est principalement composé de 80% de diazote et de 20% de dioxygène. Cette composition est homogène dans toute l'atmosphère. Un mélange de gaz parfait est aussi un gaz parfait. On peut en définitive modéliser l'air atmosphérique par un gaz parfait de masse molaire égale à la moyenne des masses molaires du diazote et du dioxygène.

- ❖ Calculer la masse molaire *M* de l'air ainsi modélisé.
- ❖ Ecrire l'équation d'état en fonction de la masse volumique

Pour déterminer le profil vertical de pression dans l'atmosphère, on complète donc la relation fondamentale de la statique des fluides par l'équation d'état du gaz parfait. Mais on introduit alors la température, qui est aussi une fonction de la position *a priori*. Il est possible d'étudier des modèles d'atmosphère plus compliqués (adiabatique, polytropique), où l'on fait aussi appel au premier principe de la thermodynamique. Mais l'hypothèse la plus simple consiste à considérer la température uniforme dans toute l'atmosphère : c'est le modèle de ***l'atmosphère isotherme***. Jusqu'à 10 km d'altitude, les mesures montrent qu'en moyenne la température décroît avec l'altitude de 2% par km. Ca n'est pas complètement négligeable, surtout à plusieurs kilomètres d'altitude. L'intérêt du modèle isotherme est de montrer que l'allure quasi exponentielle du profil de pression de l'atmosphère réelle est d'origine mécanique (les effets thermiques restant secondaires).

6.2. La pression varie exponentiellement avec l'altitude dans l'atmosphère isotherme

- ❖ Déterminer le profil vertical de pression $P(z)$, en fonction de M, g, R, T et P_0 la pression au niveau du sol
- ❖ Définir une altitude caractéristique, et l'exprimer en fonction des données. Faire l'application numérique pour une température de 25°C
- ❖ Etablir le profil vertical de masse volumique $\rho(z)$. AN : masse volumique au niveau du sol

7. Equilibre d’un fluide dans un référentiel non galiléen

7.1. Relation de la statique des fluides dans un référentiel non galiléen

❖ Rappeler l’interprétation physique des deux termes de la relation de la statique en référentiel galiléen
En référentiel non-galiléen, les forces d’inertie s’ajoutent.
❖ En déduire la relation de la statique des fluides en référentiel non-galiléen

On rappelle qu’en l’absence du phénomène de tension superficielle (sera vu cette année), la pression ne subit pas de discontinuité à la traversée d’une interface entre deux fluides.

7.2. Exemple : liquide contenu dans un chariot en translation accélérée

De l’eau est contenue dans la citerne d’un camion en accélération rectiligne constante a_0. Cette eau est immobile dans la citerne, et l’air au-dessus de l’eau est à la pression atmosphérique.

❖ Déterminer l’expression de la pression au sein du fluide, à une constante près
❖ En déduire l’allure de la surface libre de l’eau dans la citerne
❖ Quel angle fait-elle avec l’horizontal ? Faire le lien avec l’étude du pendule simple réalisé dans des conditions similaires, puis unifier ces deux études en introduisant une « pesanteur apparente »
✪ Comment pourrait-on déterminer la constante d’intégration qui reste dans les calculs ?

7.3. Exemple : liquide contenu dans un vase en rotation uniforme

Un fluide est contenu dans un vase à symétrie cylindrique. L’air situé au-dessus du fluide est à la pression atmosphérique. On introduit les coordonnées cylindriques pour étudier le fluide en équilibre.

❖ Montrer que la surface libre du fluide est un paraboloïde de révolution
✪ Comment pourrait-on déterminer la constante d’intégration restante dans le calcul ?

8. Poussée d’Archimède

Un corps quelconque immergé dans un fluide subit une force de poussée dirigée verticalement vers le haut : c’est la ***poussée d’Archimède***. Cette force de poussée n’est rien d’autre *que* ***la résultante des forces de pression*** exercées par le « fluide environnant », i.e. le fluide dans lequel le corps est immergé. Le théorème d’Archimède est un outil puissant permettant de calculer facilement l’intensité de cette poussée.

8.1. Définition de la poussée d’Archimède : Résultante des forces de pression

Considérons un corps solide immergé totalement dans l’eau. Le raisonnement qui suit reste valable pour un corps fluide non miscible avec le fluide dans lequel il est immergé. En chaque point M de la surface Σ du solide, l’eau exerce une force de pression. *La résultante des forces de pression*, notée $\vec{\Pi}$, exercées par l’eau sur le solide est la somme des forces exercées sur chaque surface élémentaire $\overrightarrow{dS}$ du solide :

$$\vec{\Pi} \overset{\text{def}}{=} \iint_{M \in surface\ \Sigma} -P(M)\,\overrightarrow{dS}$$

Pour comprendre cette écriture :
- le symbole intégrale signifie *« somme sur la surface Σ »*
- l’intégrale est double car on somme sur une courbe bidimensionnelle (une surface)
- les éléments de surface $\overrightarrow{dS}$ sont centrés sur chacun des points M constituants la surface totale Σ, et sont orientés vers *l’extérieur du solide*
- le signe « - » signifie que la force élémentaire $-P(M)\overrightarrow{dS}$ appliquée au point M est dirigée vers l’intérieur

- ❖ En considérant un solide cubique, expliquer qualitativement pourquoi cette résultante est nulle si la pression du fluide est uniforme tout autour du solide

Ce résultat se généralise quelle que soit la forme du solide : la poussée d'Archimède est non nulle ***seulement si la pression n'est pas uniforme***. Sur Terre, c'est la pesanteur qui est l'origine de cette non-uniformité, donc de l'existence de la poussée d'Archimède. Le calcul de cette résultante des forces de pression est généralement difficile à effectuer. Le théorème d'Archimède est un moyen simple et efficace pour déterminer cette résultante.

8.2. Théorème d'Archimède

Pour un corps immergé dans un fluide au repos, *la poussée d'Archimède est* ***égale à l'opposé du poids de fluide déplacé****.*

NB : L'énoncé reste vrai dans le cas où le corps immergé se situe à l'interface entre deux fluides non miscibles.

- ❖ Ecrire mathématiquement cet énoncé.
- ❖ Dans un ballon sonde rempli d'Hélium, quelle est la force qui tend à faire s'envoler le ballon ?

8.3. Ballon sonde gonflé à l'Hélium : à quoi sert l'hélium ?

- ❖ Sur un schéma, expliquer le rôle de l'hélium pour faire décoller le ballon

8.4. Parois souples ou rigides ? Ballon ouvert ou fermé ?

Dans tous les cas, la température ne variant pas de manière significative avec l'altitude (surtout dans le modèle de l'atmosphère isotherme…), on considère que la température du gaz dans le ballon ne dépend pas de l'extérieur.

Si le ballon est fermé, la quantité de gaz dans le ballon reste constante au cours de l'ascension.
Dans ce cas, si les parois sont rigides, alors le volume reste constant et la pression intérieure ne dépend pas de la pression atmosphérique, donc de l'altitude.
Si les parois sont souples, alors la pression intérieure est égale à la pression extérieure, et le volume s'en déduit avec la loi des gaz parfait.

Si le ballon est ouvert, alors la pression intérieure est égale à la pression extérieure. En général les parois sont rigides, et le volume reste donc constant. La loi des gaz parfait stipule donc qu'au cours de l'ascension, le gaz intérieur s'échappe petit-à-petit du ballon.

Les outils mathématiques dont la maîtrise est nécessaire à la mise en œuvre du programme de physique de la classe de PC sont d'une part ceux qui figurent dans l'annexe 2 du programme de la classe de PCSI et d'autre part ceux qui figurent dans la liste ci-dessous.

Le thème « analyse vectorielle » prolonge l'étude de l'outil gradient abordée en classe de PCSI en introduisant de nouveaux opérateurs : seules leurs expressions en coordonnées cartésiennes sont exigibles. Toutes les autres formules utiles (expressions en coordonnées cylindriques ou sphériques, actions sur des produits, combinaisons d'opérateurs, etc.) doivent être fournies.

1. Calcul différentiel	
Fonctions de plusieurs variables à valeurs réelles. Dérivées partielles. Différentielle. Théorème de Schwarz.	Relier la différentielle et les dérivées partielles premières. Utiliser le théorème de Schwarz (admis).
Intégration de l'expression d'une dérivée partielle.	Intégrer une expression de la forme $\partial f/\partial x=g(x,y)$ à y fixé en introduisant une fonction $\varphi(y)$ inconnue comme « constante d'intégration ».
2. Analyse vectorielle	
Gradient.	Relier le gradient à la différentielle d'un champ scalaire à une date fixée. Exprimer les composantes du gradient en coordonnées cartésiennes.
Divergence.	Citer et utiliser le théorème d'Ostrogradski. Exprimer la divergence en coordonnées cartésiennes.

Cette partie, intitulée **3.6. « Statique des fluides dans un référentiel galiléen »,** est conçue pour introduire sur le support concret de la statique des fluides le principe du découpage d'un domaine physique (volume, surface) en éléments infinitésimaux et de la sommation d'une grandeur extensive (force) pour ce découpage.
Un des objectifs est de montrer dans cette partie l'intérêt d'un formalisme spécifique – utilisation de l'opérateur gradient – pour passer à une formulation universelle d'une loi de la physique.
La statique des fluides permet également d'introduire le facteur de Boltzmann dont on affirme la généralité.

Notions et contenus	Capacités exigibles
3.6. Statique des fluides dans un référentiel galiléen	
Forces surfaciques, forces volumiques.	Citer des exemples de forces surfaciques ou volumiques.
Résultante de forces de pression.	Exprimer une surface élémentaire dans un système de coordonnées adaptées. Utiliser les symétries pour déterminer la direction d'une résultante de forces de pression. Évaluer une résultante de forces de pression.
Équivalent volumique des forces de pression.	Exprimer l'équivalent volumique des forces de pression à l'aide d'un gradient.
Équation locale de la statique des fluides.	Établir l'équation locale de la statique des fluides.
Statique dans le champ de pesanteur uniforme : relation $dP/dz = -\rho g$.	Citer des ordres de grandeur des champs de pression dans le cas de l'océan et de l'atmosphère. Exprimer l'évolution de la pression avec l'altitude dans le cas d'un fluide incompressible et homogène et dans le cas de l'atmosphère isotherme dans le modèle du gaz parfait. <u>Capacité numérique</u> : à l'aide d'un langage de programmation, étudier les variations de température et de pression dans l'atmosphère.
Poussée d'Archimède.	Expliquer l'origine de la poussée d'Archimède. Exploiter la loi d'Archimède.
Facteur de Boltzmann.	S'appuyer sur la loi d'évolution de la densité moléculaire de l'air dans le cas de l'atmosphère isotherme pour illustrer la signification du facteur de Boltzmann. Utiliser kT comme référence des énergies mises en jeu à l'échelle microscopique.

Équilibre d'un fluide dans un référentiel non galiléen en translation ou en rotation uniforme autour d'un axe fixe dans un référentiel galiléen.	Établir et utiliser l'expression de la force d'inertie d'entraînement volumique.