

**DS 1 -- Systèmes linéaires (dont élec PCSI) - ALI (01/10/2016 – 4h)**Extrait des Instructions générales des concours

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Toute réponse non justifiée ne donnera pas lieu à l'attribution de points.

Toute application numérique ne comportant pas d'unité ne donnera pas lieu à l'attribution de points.

Les différents exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre choisi par le candidat. Il prendra toutefois soin de bien numéroter les questions.

**Si certains résultats ne sont pas soulignés ou encadrés, il sera retiré 1 point /20 à la note finale.**

Vous numéroterez toutes vos pages. Si vous rendez 5 pages, vous devez numéroter 1/5, 2/5, 3/5, etc.

**Aucune sortie définitive n'est autorisée avant 12h****Résolution de Pb 1 : Recherche d'un filtre linéaire (< 30 min)**

On souhaite alimenter une résistance de  $5 \Omega$  de telle sorte que le courant qui la traverse ait une valeur moyenne de  $1 \text{ A}$ . Pour l'alimenter, on ne dispose que d'un générateur de signal carré, considéré comme une source idéale de tension, de fréquence  $10 \text{ kHz}$ , de valeur moyenne  $E/2$  et d'amplitude « crête-à-crête »  $E = 10 \text{ V}$ .

L'objectif est de déterminer le filtre linéaire à interposer entre le générateur et la résistance de manière à alimenter correctement la résistance. On précise que si le courant délivré à la résistance n'est pas continu, on souhaite que l'écart à la valeur moyenne (« l'ondulation en courant ») ne dépasse pas  $0,5 \text{ A}$ .

**Déterminer la nature, ainsi que les caractéristiques (valeurs numériques) du filtre à utiliser. Proposer un montage réalisant concrètement ce filtre, et préciser les valeurs numériques des composants (doivent être accessibles en TP).**

Consignes : rassurez-vous, il y a plusieurs niveaux d'exigence possibles, donc plusieurs réponses possibles à une résolution de problème. Votre raisonnement ne sera pas considéré comme faux dès la moindre erreur. On cherche à valoriser les éléments pertinents et justes de votre réponse, plutôt qu'à sanctionner les (petites) erreurs. Quelques rappels :

- S'approprier la situation : schéma + introduction symboles mathématiques pour grandeurs pertinentes
- Analyser : élaborer la stratégie de raisonnement, trouver comment relier les données à la conclusion
- Réaliser : faire les calculs littéraux, puis les applications numériques

Ces étapes ne se font pas nécessairement dans l'ordre.

Indépendamment de cela, la réponse sur votre copie doit être structurée logiquement et compréhensible par le lecteur...

**Problème 2 : Adaptation d'impédance et stabilité (extrait CCP 2011)**

**2) Gain hâtivement estimé ?**

On veut observer, en sortie ( $v_s$ ) du montage schématisé sur la figure 2.a, une tension  $v_e$  amplifiée au moyen d'un amplificateur opérationnel qui sature à  $\pm 15$  volts.

**2.1)** Sachant que la tension  $v_e$  peut atteindre 2 volts, expliquer pourquoi ce montage pose problème.

**2.2)** Un moyen simple pour éviter cette difficulté consiste à interposer, entre la source de tension  $v_e$  et l'entrée de l'amplificateur, un diviseur de tension tel que représenté sur la figure 2.b.

Dans l'état de la figure 2.b (c'est-à-dire avant raccordement) exprimer en fonction de  $v_e$ , la tension  $v'_e$  observée en sortie du pont diviseur.

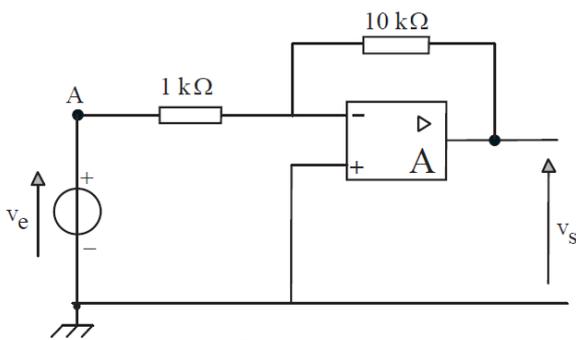


Figure 2.a

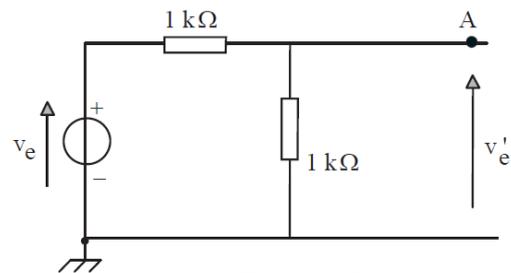


Figure 2.b

**2.3)** En multipliant le coefficient d'atténuation du pont diviseur ( $v'_e/v_e$ ) par le gain de l'amplificateur, on peut penser obtenir ainsi un gain global convenable ; préciser la valeur du gain global ainsi calculé.

Dans cette hypothèse, quelle est la valeur prévisible de la tension  $v_s$  lorsque  $v_e$  atteint 2 volts ?

**2.4)** En fait, l'expérience lors du raccordement des deux circuits (figure 2.c) donne une valeur différente ; préciser laquelle et en déduire le gain effectivement obtenu. Expliquer, en terme d'adaptation d'impédances, les raisons de ce désaccord.

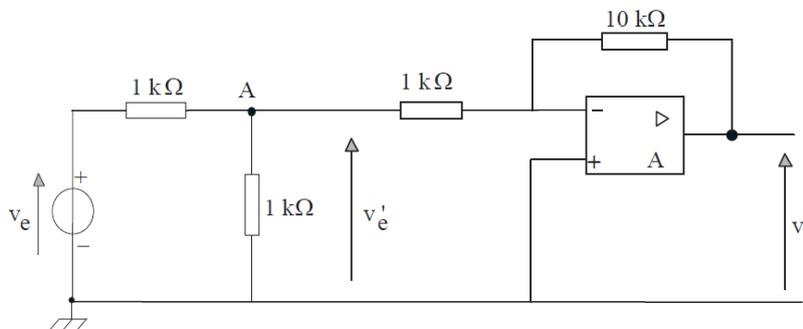


Figure 2.c

### 3) Fonction de transfert rebelle à l'expérimentation ?

L'analyse fréquentielle de Bode inclut a priori une hypothèse de stabilité pour le fonctionnement des montages électroniques étudiés, hypothèse qui ne peut être légitimée que par une analyse temporelle approfondie. Faute de cette justification, les diagrammes représentant l'amplitude et la phase des fonctions de transferts perdent leur sens physique.

Le montage étudié ci-après donne l'exemple d'une fonction de transfert dont la représentation de Bode peut être dessinée, mais dont il serait vain de vouloir exécuter un relevé expérimental.

#### 3.1) Analyse fréquentielle : tracé du diagramme de Bode

On s'intéresse au montage schématisé ci-après (figure 3), incluant un amplificateur opérationnel considéré comme idéal. Lorsqu'une tension sinusoïdale  $v_e$  de pulsation  $\omega$  est appliquée à l'entrée, une tension  $v_s$  apparaît en sortie. Exprimer la fonction de transfert complexe  $\underline{H} = \underline{V}_s / \underline{V}_e$  associée à ce montage. En préciser la valeur du gain et du déphasage, puis dessiner une représentation asymptotique de Bode pour le gain et le déphasage.

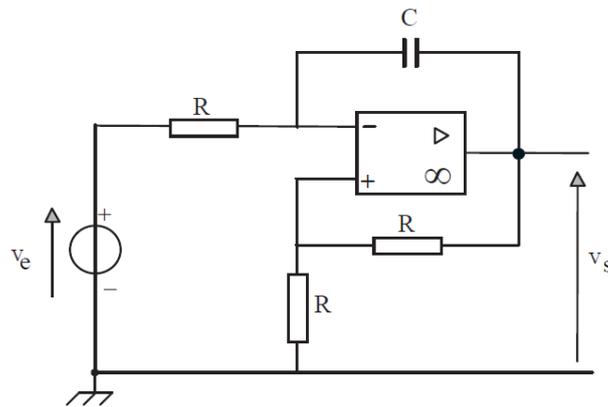


Figure 3

#### 3.2) Prise en compte du comportement temporel de l'amplificateur opérationnel

3.2.a) Retrouver directement *ou* recomposer à l'aide de la fonction de transfert obtenue, l'équation différentielle qui régit  $v_s(t)$  en fonction de  $v_e(t)$ .

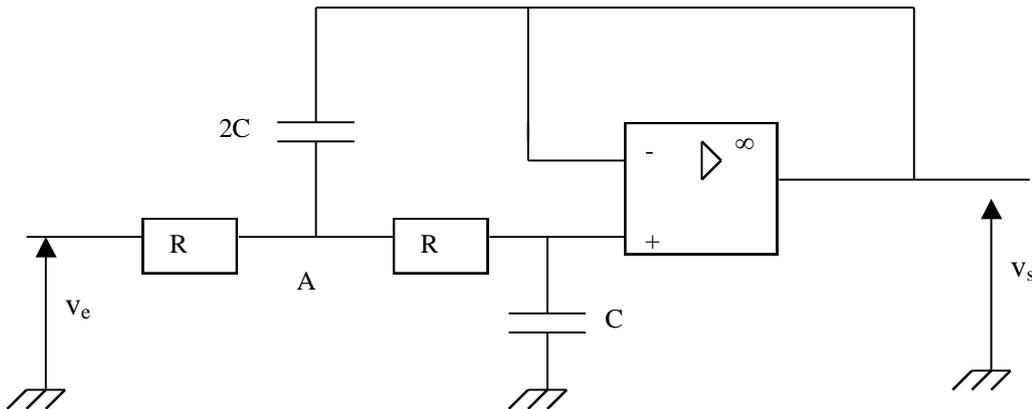
3.2.b) Résoudre cette équation différentielle dans le cas où, le condensateur étant initialement déchargé et la tension de sortie  $v_s$  nulle, un échelon de tension égal à  $+1 \mu\text{V}$  est appliquée en  $v_e$  au temps  $t = 0$ .

Décrire l'évolution de la tension  $v_s(t)$  au cours du temps. Justifier alors, dans ces conditions, l'impossibilité d'un relevé expérimental du tracé de Bode déterminé plus haut.

### Problème 3 : Filtre en électronique (extrait Mines de sup)

Le but de ce problème est d'étudier un exemple simple de circuit électronique permettant de filtrer certains signaux et d'en éliminer d'autres.

On considère le circuit électronique suivant :



L'amplificateur opérationnel est supposé idéal et fonctionne en régime linéaire.

#### Étude en régime permanent sinusoïdal

La tension d'entrée est fournie par un générateur basse fréquence et s'écrit  $v_e = E_m \cos \omega t$  où  $E_m$  est la valeur maximale et  $\omega$  la pulsation de la tension d'entrée.

La tension de sortie sera notée  $v_s = V_m \cos(\omega t + \varphi)$  où  $V_m$  désigne la valeur maximale de la tension de sortie et  $\varphi$  le déphasage de celle-ci par rapport à la tension d'entrée.

L'étude mathématique du filtre sera effectuée en utilisant la notation complexe  $\underline{v}_e$  et  $\underline{v}_s$  pour ces deux tensions :

$$\underline{v}_e = E_m e^{j\omega t} \quad \text{et} \quad \underline{v}_s = V_m e^{j(\omega t + \varphi)} \quad (\text{avec } j^2 = -1)$$

1. Déterminer par des considérations physiques simples, avec peu de calculs, la nature probable du circuit électronique proposé.

On admet que la fonction de transfert de ce circuit peut s'exprimer sous la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{v}_s}{\underline{v}_e} = \frac{1}{1 + 2jRC\omega - 2(RC)^2\omega^2}$$

2. Déterminer, en fonction de R, C et  $\omega$  :

- le gain du filtre, noté  $G(\omega)$
- le déphasage  $\varphi$ , dont on précisera l'intervalle de variation.

3. On souhaite écrire la fonction de transfert sous forme normalisée :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{v}_s}{\underline{v}_e} = \frac{1}{1 + 2j\sigma \frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Exprimer les constantes  $\sigma$  (coefficient d'amortissement du filtre) et  $\omega_0$  en fonction de R et de C. Déterminer simplement la nature du filtre à l'aide de l'expression de la fonction de transfert.

4. Donner, en fonction de  $G(\omega)$  la définition du gain exprimé en décibels (dB), noté dans la suite  $G_{dB}$ . Déterminer le comportement asymptotique du gain en décibels  $G_{dB}$ , c'est-à-dire l'expression simplifiée de  $G_{dB}$  pour  $\omega \ll \omega_0$  et  $\omega \gg \omega_0$ .

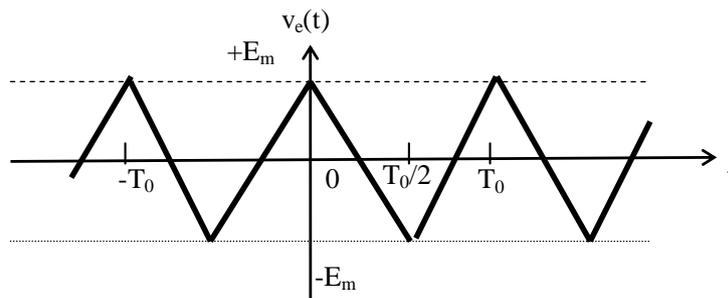
*Dans la suite, on considérera que  $\omega \ll \omega_0$  si  $\omega < \omega_0/10$  et que  $\omega \gg \omega_0$  si  $\omega > 10\omega_0$ .*

5. Définir, puis déterminer la bande passante du filtre. On fera aussi l'application numérique. On donne pour cela  $C = 1\mu\text{F} = 10^{-6}\text{F}$  et  $R = 100\ \Omega$ .

### Analyse de Fourier

La tension d'entrée est désormais une tension triangulaire (voir figure ci-dessous) de pulsation  $\omega_0$  (définie à la question 3) et de période  $T_0 = 2\pi/\omega_0$ , dont la décomposition en série de Fourier s'écrit :

$$v_e(t) = \frac{8E_m}{\pi^2} \left[ \cos\omega_0 t + \frac{1}{3^2} \cos(3\omega_0 t) + \frac{1}{5^2} \cos(5\omega_0 t) + \dots \right]$$



$E_m$ , valeur maximale de  $v_e$ , vaut ici  $E_m = 1\ \text{V}$ .

On constate expérimentalement que la tension de sortie  $v_s$  est une fonction sinusoïdale du temps.

6. Définir les termes : fondamental et harmonique de rang  $n$ .

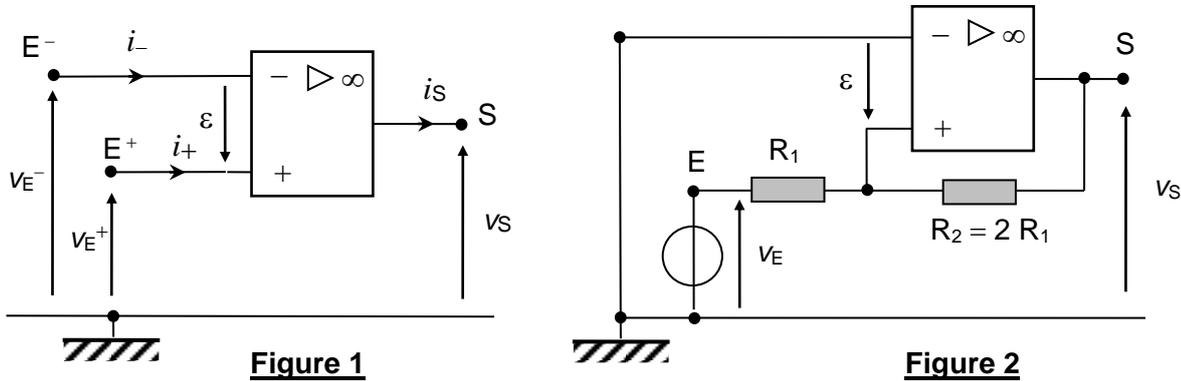
7. Déterminer la pulsation  $\omega$  de la tension de sortie.

8. Calculer numériquement la valeur maximale de la tension de sortie.

## Problème 4 : Générateur de signaux (E3A PSI 2014)

### A / Amplificateur opérationnel idéal

La représentation symbolique de l'amplificateur opérationnel idéal (AO) et la notation adoptée sont précisées en figure 1, ci-dessous :



L'AO est un amplificateur de différence, la tension de sortie  $v_S$  est proportionnelle à la tension différentielle d'entrée  $\varepsilon = v_{E^+} - v_{E^-}$  entre les tensions appliquées respectivement aux entrées non inverseuse  $E^+$  et inverseuse  $E^-$ , soit  $v_S = A(v_{E^+} - v_{E^-})$ . Le coefficient  $A$  est l'amplification différentielle, il dépend de la fréquence du signal d'entrée et sa valeur en régime continu est notée  $A_d$ . La valeur absolue de la tension de saturation en sortie vaut :  $V_{SAT} = 15 \text{ V}$ .

- A1.** Rappeler les hypothèses de l'AO idéal.
- A2.** Préciser ses deux régimes de fonctionnement et les conditions sur  $\varepsilon$  et  $v_S$  associées. Représenter la caractéristique  $v_S(\varepsilon)$  et faire apparaître les deux régimes sur la figure

### B / Comparateur à hystérésis

#### Stabilité du montage

Considérons le montage de la figure 2 ci-dessus. Temporairement, uniquement pour les deux prochaines questions, on considère l'amplificateur opérationnel comme un système linéaire du premier ordre. La tension de sortie  $v_S$  de l'AO est liée à la tension différentielle d'entrée  $\varepsilon$  par une équation différentielle linéaire du premier ordre qui s'écrit :

$$\tau \frac{dv_S(t)}{dt} + v_S(t) = A_d \varepsilon(t)$$

- $\tau$  est la constante de temps de l'AO, inverse de la pulsation de coupure
- $A_d$  est le coefficient d'amplification statique (ou gain en régime continu)

- B1.** Donner un ordre de grandeur de  $A_d$  et  $\tau$ , sachant que la fréquence de coupure est d'environ 15 Hz.
- B2.** Établir l'équation différentielle linéaire du premier ordre à laquelle obéit  $v_S(t)$  en fonction de  $A_d$ ,  $\tau$  et  $v_E(t)$ . Le système est-il stable ou instable ? Évaluer numériquement la constante de temps  $\tau_B$  caractéristique de l'évolution de  $v_S(t)$ . En déduire le mode de fonctionnement de l'AO.

## Description du cycle d'hystérésis

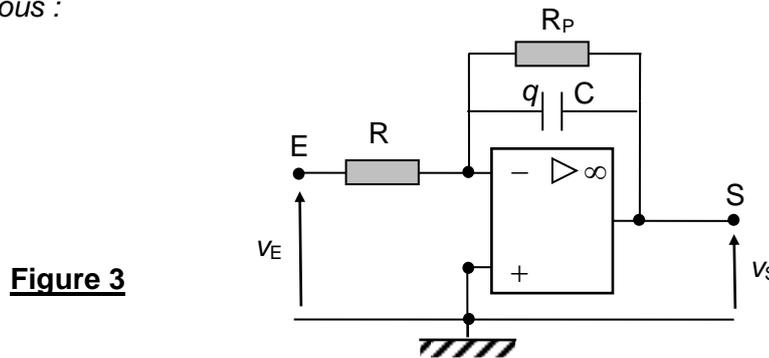
On considère par la suite l'AO idéal.

- B3.** Justifier qu'il y a basculement à  $\pm V_{SAT}$  pour deux valeurs seuils de  $v_E$  à préciser.
- B4.** La tension d'entrée est sinusoïdale de pulsation  $\omega$  et d'amplitude  $V_{EM} = 15 \text{ V}$ . Compléter la caractéristique statique de transfert  $v_S = f(v_E)$  du montage, fournie sur le document-réponse. Préciser le sens d'orientation du cycle obtenu. Justifier le nom donné au montage : « comparateur non inverseur à hystérésis ».

## C / Intégrateur inverseur

### Amplificateur opérationnel idéal

L'amplificateur opérationnel idéal fonctionne en régime linéaire selon le montage proposé sur la figure 3, ci-dessous :



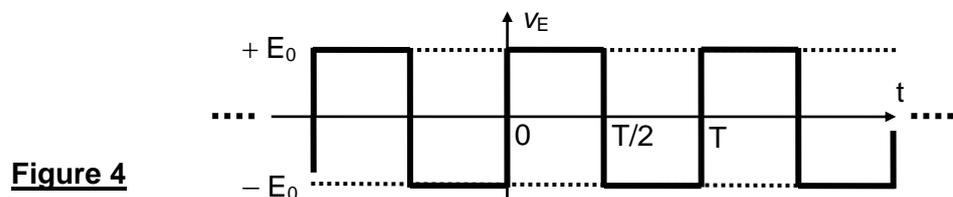
- C1.** Donner « sans » calcul la nature du filtre ainsi constitué (aide : utiliser schémas équivalents) Quelle opération réalise-t-il à basse fréquence ?
- C2.** Déterminer la fonction de transfert  $H(j\omega) = v_S/v_E$  de ce filtre pour un signal d'entrée  $v_E(t)$  sinusoïdal, de pulsation  $\omega$  ; préciser sa pulsation de coupure  $\omega_C$ .
- C3.** Représenter l'allure asymptotique des courbes de gain  $G_{dB} = 20 \log(|H|)$  et de déphasage entrée-sortie  $\varphi = \arg(H)$  en fonction de  $\log(\omega/\omega_C)$ .

La condition initiale sur la charge électrique est telle que :  $v_S(0) = \frac{E_0 T}{4 RC}$ .

- C4.** Rechercher dans quel domaine de pulsation le montage de la figure 3 réalise une intégration et une inversion du signal d'entrée. Placer ce domaine sur les graphes obtenus en C3.

La tension alternative d'entrée est un créneau, de période  $T$  et d'amplitude  $E_0$ , dont la décomposition en série de Fourier s'écrit :

$$v_E(t) = \frac{4E_0}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\sin[(2p+1)\omega t]}{2p+1}$$



**C5.** Déterminer la tension de sortie  $v_{Sn}(t)$  pour la composante  $v_{En}(t)$  d'ordre  $n = 2p + 1$  du signal d'entrée dans son domaine d'intégration.

**C6.** En déduire que le signal de sortie  $v_S(t)$  admet la décomposition en série de Fourier :

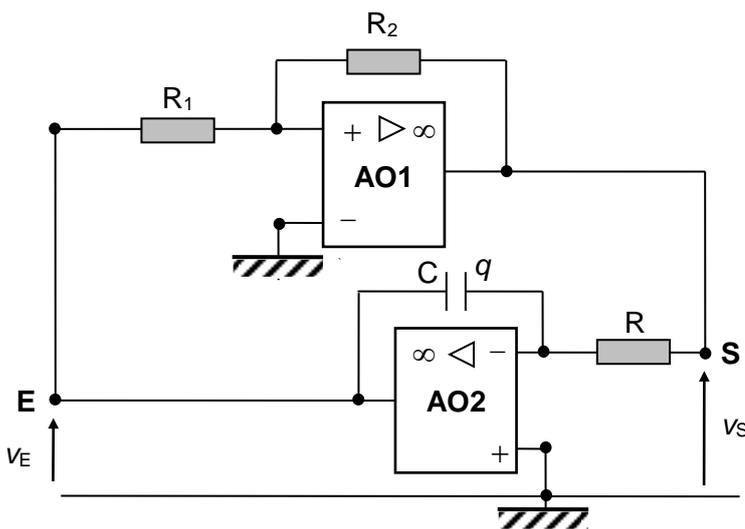
$$v_S(t) = B \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\cos [(2p+1)\omega t]}{(2p+1)^2}.$$

Préciser l'expression de B en fonction de  $E_0$ , R, C et  $\omega$ .

**C7.** Indépendamment de la question précédente, et en revenant à la notation réelle, décrire la forme du signal de sortie  $v_S(t)$ . Représenter, sur le chronogramme 1 du document-réponse, l'évolution de  $v_S(t)$  pour  $R_p = 10R$  et  $T = 2RC$ .

### D / Génération de signaux périodiques

Les amplificateurs opérationnels du montage suivant (figure 5) sont supposés idéaux.



**Figure 5**

**D1.** Identifier les fonctions réalisées par chacun des montages associés à chacun des amplificateurs opérationnels AO1 et AO2.  
(bonus) Expliquer pourquoi le dispositif est qualifié « d'astable ».

La condition initiale imposée est  $q(t=0) = 0$ . A cet instant,  $v_S$  bascule en saturation positive :  $v_S(0^+) = V_{SAT}$ . La saturation négative correspond à un signal de sortie  $-V_{SAT}$ .

**D2.** Déterminer l'évolution de  $v_E(t)$  au cours du temps en fonction de R, C,  $V_{SAT}$  et t. Pour quelle valeur de  $v_E$  et à quel instant  $t_0$  le premier basculement de  $v_S$  vers  $-V_{SAT}$  se produit-il ?

**D3.** En choisissant  $t_0$  comme origine des temps, déterminer la nouvelle évolution de  $v_E(t)$ . Pour quelle valeur de  $v_E$  le basculement de  $v_S$  en saturation positive se produit-il ? Quelle est la durée  $\Delta t_1$  de la phase de saturation négative de  $v_S$  ? Quelle est la durée  $\Delta t_2$  de la phase suivante correspondant à une saturation positive de  $v_S$  ? Exprimer la période T des oscillations en fonction de R,  $R_1$ ,  $R_2$  et C.

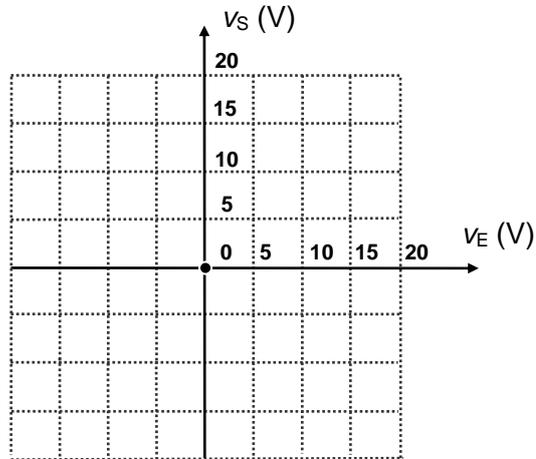
**D4.** Représenter, sur le chronogramme 2 du document-réponse, les évolutions de  $v_S(t)$  et  $v_E(t)$  au cours du temps, pour  $R_2 = 2R_1$ . Quels types de signaux sont générés par un tel dispositif ?

**D5.** Compléter sur le document-réponse la caractéristique statique de transfert  $v_S = f(v_E)$  du montage. Préciser le sens d'orientation du cycle obtenu.

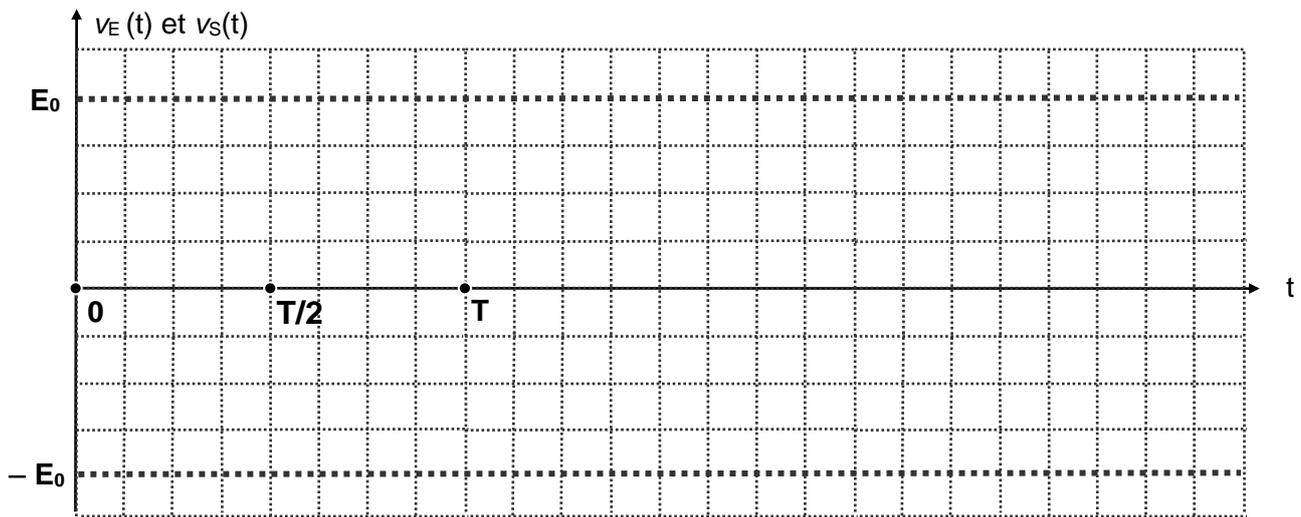
**Document-réponse (Pb4 E3A), à compléter et rendre avec la copie**

**B4.** Caractéristique statique de transfert : *cycle d'hystérésis*

$v_E$  : 5 V/division  
 $v_S$  : 5 V/division

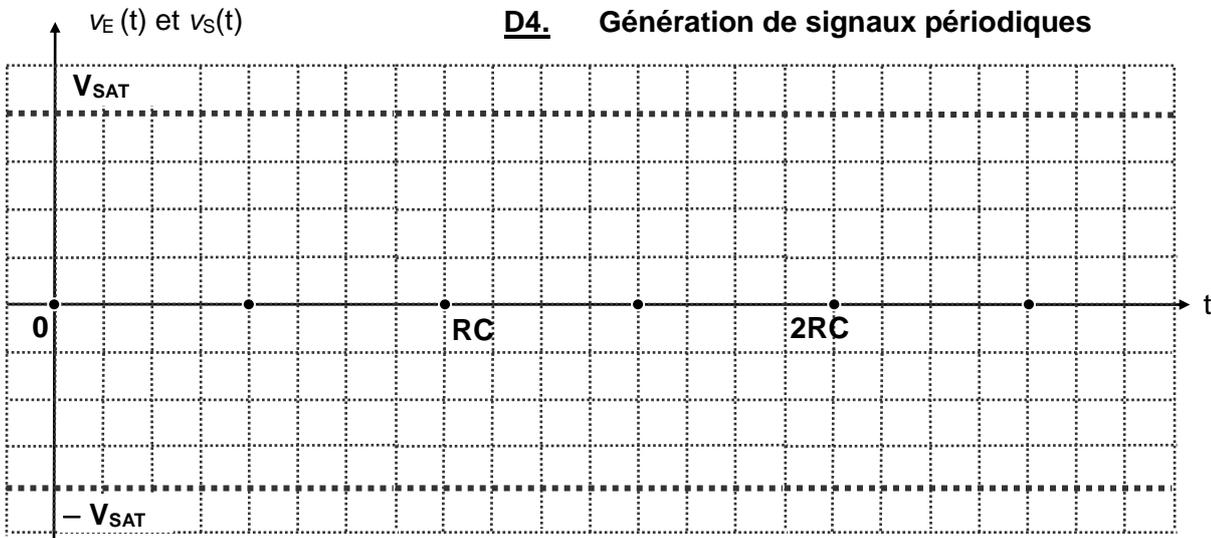


**C7.** Intégrateur inverseur (*schéma à compléter*)



chronogramme 1

#### D4. Génération de signaux périodiques

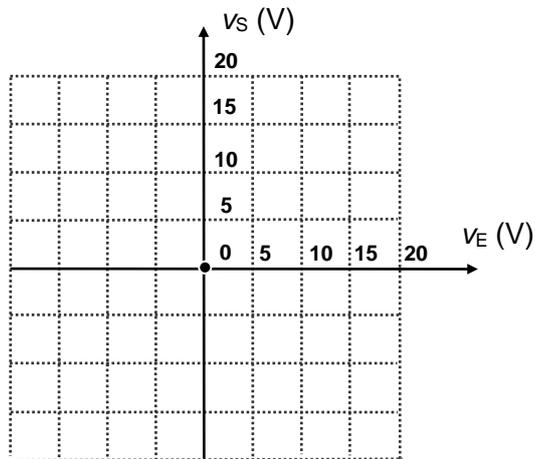


chronogramme 2

#### D5. Caractéristique statique de transfert : génération de signaux périodiques

$v_E$  : 5 V/division

$v_S$  : 5 V/division



**Fin de l'énoncé**