Transport d'énergie thermique par *conduction* : Diffusion thermique

Intro : Lorsqu'une barre de métal est mise en contact avec un corps chaud (pic de brochette dans le feu par exemple), on observe que la température augmente progressivement tout le long de la barre. On dit que « la chaleur diffuse » dans le métal. Il y a transport d'énergie thermique à l'échelle microscopique. C'est un des trois modes du transfert thermique : *la diffusion thermique*.
L'objectif du chapitre est tout d'abord *d'établir l'équation aux dérivées partielles* vérifiées par le champ de température, dans le matériau où se produit la diffusion thermique. On s'appuie pour cela sur l'équation locale de conservation de l'énergie (c'est le *premier principe écrit sous forme locale*), et sur l'analogue de la loi de Fick : *la loi de Fourier*. On se focalise ensuite sur le régime *stationnaire* (et quasi-stationnaire), pour lequel on peut introduire la notion de *résistance thermique*.

1. Formulation infinitésimale des principes de la thermodynamique

En première année, les deux principes de la thermodynamique ont été énoncés pour une transformation de durée finie. Nous les énonçons ici pour une durée élémentaire.

1.1. Premier principe sur une durée élémentaire

On considère un système macroscopique fermé quelconque.

- ❖ (rappel) Enoncer complètement le premier principe pour ce système sur une durée finie Δt (3 choses)
- ❖ (rappel) Interpréter physiquement chacun des termes. Comment qualifie-t-on ce principe ?
- ❖ En notant avec un « d droit » df la variation élémentaire d'une fonction, et en notant avec un « petit delta » δq une quantité élémentaire échangée ou créée, écrire le 1er principe sous forme infinitésimale

1.2. Deuxième principe sur une durée élémentaire

On considère un système macroscopique fermé quelconque.

- ❖ (rappel) Enoncer le deuxième principe pour ce système sur une durée finie Δt (3 choses)
- ❖ (rappel) Interpréter physiquement chacun des termes. Comment qualifie-t-on ce principe ?
- ❖ Avec les mêmes notations qu'au paragraphe précédent, écrire le 2^{e} principe sous forme infinitésimale

2. Description de la diffusion thermique

2.1. Les trois types de transferts thermiques

L'échange d'énergie entre le système étudié et l'extérieur peut s'effectuer : via le travail d'une force ; via un transfert thermique.

Il existe trois modes de transferts thermiques :

- l'échange par ***convection***
- l'échange par ***diffusion*** (le seul traité dans ce chapitre)
- l'échange par ***rayonnement***

- ❖ Donner un exemple concret pour chaque type de transfert thermique. Dans chaque cas, préciser sous quelle forme est transportée l'énergie.

Le « moteur » de la diffusion thermique (comme pour tous les phénomènes de diffusion) est l'agitation thermique. C'est un « moteur » microscopique.

Grandeurs impliquées dans la diffusion thermique
Température et énergies (énergie interne + « chaleur »)

Cause et conséquence de la diffusion thermique
*La **cause** de la diffusion thermique est **la non-uniformité de la température** du matériau.* *La diffusion **tend à homogénéiser la température**.*

2.2. Flux thermique (= Puissance thermique) et Vecteur puissance surfacique

Lorsqu'une barre de métal est mise en contact avec un corps chaud (pic de brochette dans le feu par exemple), on observe que la température augmente progressivement tout le long de la barre.

On dit que la « la chaleur diffuse » dans le métal. Il y a transport d'énergie thermique, et on peut définir un débit (ou flux, ou courant) associé à ce transport : c'est tout simplement ***la chaleur Q transférée par unité de temps*** à travers une surface.

Définition du flux thermique Φ_{th} à travers une surface

$$\delta Q_{trav} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{\Phi_{th}}\, dt$$

Le flux thermique est l'énergie thermique qui traverse une surface par unité de temps.
On l'appelle aussi **puissance thermique,** *parfois notée* $\boldsymbol{P_{th}}$

- Donner les unités de chaque grandeur, et expliquer leur signification sur un schéma.

Définition du vecteur puissance surfacique
ou « vecteur densité de courant thermique »

Tout débit est associé à un vecteur densité de courant. La puissance thermique ne fait pas exception :

$$\Phi_{\text{th}} \stackrel{\text{def}}{=} \iint_S \vec{\boldsymbol{j}}_{\boldsymbol{th}} \cdot \overrightarrow{dS}$$

2.3. EQ thermodynamique local : énergie interne volumique, capacité thermique massique

Nous étudions dans ce chapitre des systèmes macroscopiques *hors d'équilibre thermodynamique*. En effet, à l'équilibre thermodynamique la température du système est nécessairement homogène, il ne peut plus y avoir diffusion.

Or l'application des principes de la thermodynamique n'est possible qu'entre deux instants où les paramètres d'état intensifs peuvent être définis (état d'équilibre interne). C'est pourquoi il va être nécessaire d'utiliser les principes de la thermodynamique à l'échelle mésoscopique, où les « grandeurs extensives usuelles » s'exprimeront en fonction des « grandeurs intensives associées » et du volume élémentaire du système (ou de la masse élémentaire, au choix).

C'est finalement ce que nous avons déjà fait à plusieurs reprises, lorsque nous avons écrit les équations de conservation à l'échelle mésoscopique. L'hypothèse stipulant qu'il est possible de définir une échelle mésoscopique où l'on peut définir des grandeurs intensives localement uniformes s'appelle « l'hypothèse d'équilibre thermodynamique local ».

- Définir l'énergie interne volumique
- Définir la capacité thermique (à volume constant) massique

3. Lois de la diffusion thermique

L'objectif est ici de déterminer l'équation différentielle de diffusion de la température $\boldsymbol{T(\vec{r}, t)}$. Sa résolution permet alors de prédire/décrire/comprendre le processus de diffusion.

Pour cela, on va se doter de deux lois. La première est *universelle* car elle est générale : c'est la loi de conservation de l'énergie (1er principe). La seconde est *phénoménologique*, issue d'observations expérimentales : c'est la loi de Fourier (analogue à la loi de Fick).

3.1. Les trois étapes pour établir l'équation de diffusion

L'équation de diffusion ne doit faire apparaître que la température :
- un bilan d'énergie sur un volume élémentaire (i.e. l'application du 1er principe) nous donnera une relation entre $\boldsymbol{u}$ (énergie interne volumique) et le vecteur densité de courant $\vec{\boldsymbol{j}}_{\boldsymbol{th}}$
- la loi de Fourier nous donnera une relation entre $\vec{\boldsymbol{j}}_{\boldsymbol{th}}$ et $\boldsymbol{T}$
- la capacité thermique du matériau nous donnera une relation entre $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{T}$

Pour les deux modèles idéaux décrivant la matière en thermodynamique (gaz parfait, et PCII), on rappelle que la *température d'un volume élémentaire est une mesure de son énergie interne*. Cela reste une bonne approximation pour la plupart des matériaux.

3.2. Bilan d'énergie : 1er principe de la thermodynamique

Dans un premier temps, on considère la diffusion unidimensionnelle et unidirectionnelle de la température le long d'un barreau solide rectiligne (section S) indéformable. Les parois latérales sont calorifugées. La température de son extrémité gauche est plus élevée que celle de son extrémité droite.

❖ L'énergie diffuse entre les deux extrémités du fait de la différence de température. Dans quel sens est orienté le flux d'énergie (ou « flux de chaleur ») ?

❖ En considérant une tranche élémentaire du cylindre, faire un bilan d'énergie : *« l'augmentation du stock d'énergie à l'intérieur est égale à ce qui entre moins ce qui sort »*. Quelle est la conséquence de l'hypothèse « barreau indéformable » ?

❖ Dans ce bilan, faire apparaître l'énergie interne volumique $u(x,t)$ et le vecteur puissance surfacique $\vec{j}(x,t)$, et en déduire l'équation locale de conservation.

Equation locale de conservation de l'énergie thermique *1er principe local sans terme de travail* $$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{t}} + \boldsymbol{div}(\vec{\boldsymbol{j}}_{\boldsymbol{th}}) = \boldsymbol{0}$$

C'est la version locale du 1er principe, sans terme de travail.

Pour établir l'équation de diffusion, on souhaite ne conserver que le champ de température, on peut déjà remplacer le terme d'énergie interne via la capacité thermique massique c (modèle PCII) :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + div(\vec{j}_{th}) = 0$$

3.3. Cas avec production et disparition d'énergie

L'énergie est une grandeur qui se conserve, si l'on considère *toutes les formes d'énergie*. Or souvent en exercice, *on ne considère que les formes thermiques* : énergie interne, transfert thermique ; sans tenir compte par exemple :
- de l'énergie des liaisons chimiques, libérée sous forme thermique lors de réactions (endo/exo)thermiques
- de l'énergie interne produite par l'effet Joule ou par des frottements mécaniques
- de l'énergie des liaisons entre nucléons libérée sous forme thermique lors de réaction nucléaire

Pour palier au fait que ces énergies autres que thermiques ne sont pas comptabilisées, il faut ajouter un terme de « création ou disparition » d'énergie.

❖ Faire apparaître les taux de production et de disparition d'énergie τ_p et τ_d dans l'équation locale (définis positifs). Préciser leur unité.
❖ Expliquer comment on peut ne garder que le terme de création en l'algébrisant.

Cas particulier de l'effet Joule *(le seul au programme) :*
L'effet Joule est une conversion de travail électrique en énergie interne. Pour un système macroscopique :

$$\Delta U = W_{elec}$$

En exercice, le travail électrique est ***souvent traité comme un terme de création*** (car d'origine non-thermique).

Préliminaire : On notera que la résistance électrique d'un barreau de longueur L et de section S s'exprime ainsi en fonction de la conductivité $R = \frac{L}{S\sigma}$ (sera démontré plus tard).

- ❖ En repartant du premier principe et en incluant l'effet Joule, établir l'équation locale de l'énergie thermique, en exprimant le terme d'effet Joule en fonction :
    - du courant I traversant le barreau
    - de la conductivité électrique σ
    - de la section S du barreau.

3.4. Conduction thermique : loi phénoménologique de Fourier

On dispose d'une équation scalaire et de 4 inconnues scalaires (T et $\vec{j}$). Il nous manque 3 équations scalaires reliant nos 4 inconnues. En traduisant mathématiquement les observations expérimentales ci-dessous, et en supposant la relation linéaire (« DL 1er ordre »), on obtient la loi de Fourier.

Les observations expérimentales montrent que :
- le flux de chaleur croît avec la non-uniformité de la température
- le flux de chaleur va des zones les plus chaudes vers les zones les moins chaudes

Loi de Fourier
(relation entre la cause et l'effet de la diffusion)

$$\vec{j}_{th} = -\lambda\,\overrightarrow{grad}(T)$$

$\lambda > 0$ est la ***conductivité thermique*** (en $W.m^{-1}.K^{-1}$). Elle dépend du matériau.

	Air	Polystyrène expansé	**Eau**	Bois	Verre	**Béton**	**Acier**	Cuivre
$\lambda\ (Wm^{-1}K^{-1})$	$\mathbf{0,03}$	0,004	$\mathbf{0,6}$	0,3	0,5 à 2	**1**	**20**	400

3.5. Equation de diffusion : « équation de la chaleur »

- ❖ Dans le cas unidimensionnel précédent, utiliser la loi de Fourier pour établir l'équation différentielle vérifiée par la température $T(x,t)$
- ❖ Utiliser les équations générales 3D pour établir l'équation de la chaleur 3D

Equation de la chaleur

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D\,\Delta T$$

avec $D = \frac{\lambda}{\rho c}$ la *diffusivité thermique* (en $m^2.s^{-1}$)

Ordres de grandeur :
- $D_{Cu} = 117\ 10^{-6}\ m^2.s^{-1}$
- $D_{eau} = 10^{-7}\ m^2.s^{-1}$
- $D_{polystryrène} = 4\ 10^{-7}\ m^2.s^{-1}$

La diffusivité thermique est de l'ordre de grandeur de la diffusivité particulaire dans les gaz (la plus grande donc). Ainsi, la diffusion thermique est en général un processus plus rapide que la diffusion particulaire.

3.6. Conditions aux limites

L'équation de diffusion contient une dérivée du 1er ordre en temps et du 2e ordre en position. Pour déterminer la solution d'une diffusion unidimensionnelle, il faut se doter de :

- ***1 condition initiale*** *(relative à la dépendance temporelle)*
- ***2 conditions aux limites*** *(relatives à la coordonnée spatiale)*

Il faut 6 conditions à la limite dans le cas tridimensionnel. On énonce ci-dessous plusieurs propriétés utiles pour déterminer les conditions aux limites en exercice.

Continuité du flux thermique

Le flux thermique est une **fonction continue de la position***.*
Il est donc nécessairement le même de part et d'autre d'une interface entre deux milieux.

➢ Démontrer cet énoncé en définissant un système infiniment petit à cheval sur l'interface, et faire tendre sa dimension longitudinale vers zéro.

Continuité de la température *en un point de* ***contact thermique parfait***

Deux corps sont en contact parfait lorsque tous les points des deux zones jointes sont effectivement en contact.
Il n'y a alors pas d'espace vide (ou de 3e corps) interposé entre les deux corps.
Dans ce cas, la température est une fonction continue de la position.

On admet cette propriété comme étant issue de l'expérience. Essayons tout de même de la comprendre de manière intuitive : il semble que cette propriété découle directement de l'existence de l'équilibre thermodynamique local. Quand on met en contact deux corps non-miscibles (solide-solide, ou solide-fluide le plus souvent) initialement de température différente, la diffusion thermique qui s'opère au niveau de l'interface sur une échelle mésoscopique est d'autant plus intense que la différence de température est importante. Aussi, en un temps nécessairement inférieur aux autres échanges d'énergie étudiés à l'échelle macroscopique, la température devient uniforme dans une zone mésoscopique autour de l'interface : c'est d'ailleurs une nécessité pour que le concept de température possède encore une signification précise autour de l'interface.

Evidemment, si le contact est irrégulier, s'il existe des « cavités » de taille significative (vides ou emplies d'un 3e corps, de l'air par exemple) alors cette uniformisation de la température autour de l'interface n'est plus possible, et la température peut être localement discontinue.

Discontinuité de la température à une interface solide - liquide

L'échange d'énergie thermique entre une paroi solide et un **fluide circulant à son contact***, peut être modélisé en première approximation (loi phénoménologique) par la loi de Newton :*

$$P_{th} = hS\Delta T$$

où S est la surface d'échange, h un coefficient de proportionnalité et ΔT la différence de température entre la paroi et le fluide. La circulation du fluide peut être forcée, ou spontanée (Archimède).

On notera qu'il n'y a pas contradiction avec l'encadré précédent. Lorsqu'un fluide s'écoule autour d'un solide, il existe une « couche limite » dans laquelle le fluide « colle » à la paroi. Le gradient de température dans cette couche limite est important. Si l'on modélise la situation en négligeant l'épaisseur de la couche limite, il faut alors modéliser la température comme étant une fonction discontinue de l'espace, passant brutalement de celle du solide à celle du liquide circulant : c'est ce qui est fait dans l'énoncé de la loi de Newton.

Flux thermique au niveau d'une paroi calorifugée

Le flux thermique **dirigé selon la normale** *à une paroi* **calorifugée** *est* **nul** *par définition.*

4. Exploitations de l'équation de diffusion

4.1. Les phénomènes diffusifs sont *irréversibles*

Inverser le sens du temps $(t \rightarrow -t')$ ne laisse pas l'équation de diffusion invariante : *la diffusion est irréversible.*

4.2. Longueur et temps caractéristiques de diffusion

Via un raisonnement par ordre de grandeur, on établit le lien entre *longueur caractéristique* et *temps caractéristique* de diffusion :

La diffusion est un processus lent à grande distance :

$$L_c^2 = D\,\tau_c$$

Il faut donc 4 fois plus de temps pour diffuser deux fois plus loin.

5. Solution dans le cas stationnaire – Résistance thermique

5.1. Résistance thermique d'un barreau rectiligne

On considère un barreau, calorifugé latéralement et maintenu à températures constantes à ses deux extrémités par deux thermostats T_1 et T_2.

- Montrer que le profil de température d'un barreau rectiligne est affine en régime stationnaire
- Montrer que le « flux thermique est conservatif » en régime stationnaire.
  Quel est le résultat analogue en électricité ?
- Etablir la relation entre la différence de température aux extrémités du barreau ΔT et le flux thermique ϕ_{th}
- Par analogie avec la loi d'ohm, définir la résistance thermique R_{th} du barreau.

Résistance thermique en régime stationnaire

En régime stationnaire la différence de température aux extrémités et la puissance thermique sont proportionnels

$$\boldsymbol{\Delta T = R_{th}\,\phi_{th}}$$

le coefficient de proportionnalité étant par définition ***la résistance thermique*** *(par analogie avec la loi d'Ohm)*

Expression de la résistance thermique en fonction des dimensions

Dans un barreau rectiligne de longueur L et de section S :

$$\boldsymbol{R_{th} = \frac{L}{\lambda S}}$$

L'expression de la résistance thermique en fonction de la géométrie d'un barreau cylindrique est à retenir par cœur. C'est la même expression que la résistance électrique d'un barreau métallique (sera vu plus tard).

- Trouver un exemple concret (fuite thermique à travers les éléments délimitant la salle de classe par exemple) :
  - de résistances thermiques en série
  - de résistances thermiques en parallèle

5.2. Résistance thermique en géométrie cylindrique

- En effectuant un bilan d'énergie en régime permanent sur le volume élémentaire situé entre $[r; r + dr]$, établir l'équation de la chaleur en supposant le problème invariant :
  - par translation suivant l'axe du cylindre
  - par rotation autour de l'axe du cylindre

donc en supposant que les champs ont la forme suivante : $T(r)$ et $\vec{j} = j(r)\overrightarrow{e_r}$

- Vérifier que l'expression du laplacien en coordonnées cylindriques permet de retrouver le résultat à partir de l'équation de la chaleur générale

- Déterminer ensuite l'expression de la résistance thermique d'un dispositif constitué de deux surfaces cylindriques de hauteur H et de rayons R_1 et R_2, resp. à T_1et T_2, séparées par un matériau de conductivité λ

$$R_{th} = \frac{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}{2\pi\lambda H}$$

5.3. Résistance thermique en géométrie sphérique

- En effectuant un bilan d'énergie en régime permanent sur le volume élémentaire situé entre $[r; r + dr]$, établir l'équation de la chaleur en supposant le problème invariant :
  - par rotation d'angle θ
  - par rotation d'angle φ

donc en supposant que les champs ont la forme suivante : $T(r)$ et $\vec{j} = j(r)\overrightarrow{e_r}$

- Vérifier que l'expression du laplacien en coordonnées sphériques permet de retrouver le résultat à partir de l'équation de la chaleur générale

- Déterminer ensuite l'expression de la résistance thermique d'un dispositif constitué de deux surfaces sphériques de rayons R_1 et R_2, resp. à T_1et T_2, séparées par un matériau de conductivité λ

$$R_{th} = \frac{1}{4\pi\lambda}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

5.4. ARQS – Analogie électrique avec le circuit RC

- Enoncer le critère qui doit être vérifié pour que l'ARQS soit valide dans l'étude des circuits électriques
- En électricité, que peut-on dire quand l'ARQS est vérifiée (« à quoi ça sert de se placer dans l'ARQS ») ?

Il s'agit de transposer cette notion dans le cadre de la diffusion thermique. Considérons le cas simple d'un barreau métallique rectiligne de longueur L. Le régime stationnaire est réalisé expérimentalement en gardant constante les températures fixées aux bornes du barreau. Un régime variable est réalisé en faisant varier la différence de température aux bornes avec le temps : on note τ_{var} le temps caractéristique de ce régime variable.

<u>Intérêt de la notion d'ARQS thermique</u>
Un régime variable sera qualifié de « quasi-stationnaire » s'il est suffisamment « lentement variable » pour que la **notion de résistance thermique puisse être encore utilisée** *(le flux thermique est alors conservatif)*

- Quelle est la relation de la diffusion thermique analogue à la loi des nœuds en régime stationnaire ?
- Quel est l'analogue thermique τ_{diff} du « temps de propagation de l'onde électromagnétique » ?
- Par analogie avec l'électricité, donner le critère de validité de l'ARQS thermique
- Préciser ce critère lorsque le régime variable est sinusoïdal de fréquence f

<u>Validité de l'ARQS thermique</u>

Lorsqu'un conducteur thermique de longueur L est soumis à une différence de température ***variable*** *à ses bornes, l'ARQS est valide si :*

$$\frac{L^2}{D} \ll \tau_{var}$$

<u>Exemple : dispositif thermique analogue au circuit RC série</u>

Considérons une maison modélisée simplement par une seule pièce délimitée par six faces (quatre murs, le sol et le plafond). La température initiale de l'intérieur de la pièce est notée T_i, la température de l'air extérieur est constante et uniforme et notée T_{ext}. A $t = 0$, la chaudière tombe en panne et la maison n'est plus chauffée de l'intérieur. Seules les fuites thermiques à travers les murs subsistent.

- ❖ Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la température de l'air intérieur $T(t)$ en fonction :
  - o de la résistance thermique totale R_{th}des murs, du plafond (sol supposé athermane)
  - o de la capacité thermique à volume constant C_v de toute la matière située à l'intérieur de la pièce
- ❖ En déduire $T(t)$
- ❖ Modéliser la situation par un circuit électrique, en faisant apparaître sur ce schéma T_{ext}, Φ, R_{th}, C_v et $T(t)$
- ❖ Donner les relations « différence de température – flux thermique » aux bornes des deux dipôles thermiques ainsi identifiés
- ❖ A quelle condition notre calcul utilisant la notion de résistance thermique est-il valable ?

6. <u>Applications de la notion de résistance thermique</u>

6.1. <u>Double vitrage</u>

On considère un double vitrage constitué :

- d'une vitre de surface S, d'épaisseur e / 3 et de conductivité λ
- d'une seconde vitre de même caractéristique
- d'un couche de gaz situé entre les deux vitres, d'épaisseur e / 3 et de conductivité λ' ~ λ / 100

❖ Expliquer l'intérêt de ce dispositif pour l'isolation thermique.

6.2. <u>Température de contact et sensation de chaud</u>

Lorsque l'on pose la main sur une table en bois ou sur une table en acier, celle en bois semble « plus chaude » que celle en acier, même si ces deux tables sont à la même température, car en équilibre thermique avec l'air ambiant de la même pièce.

On se propose d'interpréter cette observation en considérant la situation simplifiée suivante :

- la main et la table sont assimilées à des cubes de côté L. Ces cubes sont en contact. Ils sont calorifugés, sauf au niveau de la surface de contact.
- Les extrémités des deux cubes qui ne sont pas en contact sont à des températures fixées : respectivement T_1 pour la main (de conductivité λ_1) et $T_2 < T_1$ pour la table (conductivité λ_2)
- la main et la table sont en contact depuis assez longtemps pour considérer le *régime permanent établi*
- On suppose qu'en régime établi les températures des deux surfaces en contact sont égales. On appelle cette température « température de contact ».
- ce sont les nerfs du bout des doigts qui provoquent la sensation de chaleur

Calculer la température de contact en fonction de T_1, T_2, λ_1 et λ_2.
Expliquer pourquoi une table en bois semble « plus chaude » qu'une table en acier.

6.3. Isolation d’une conduite

Soit une canalisation cylindrique rectiligne infinie, dans laquelle circule de l’eau à la température T_e (uniforme):

- canalisation de rayon intérieur r_1 et extérieur r_2, conductivité thermique λ_1
- gaine isolante de rayon intérieur r_2 et extérieur r_3, conductivité λ_2
- coefficient conducto-convectif h_1 entre l’eau et la conduite
- coefficient h_2 entre la gaine et l’air ambiant à température T_0

❖ Etablir l’expression de la résistance thermique totale pour une longueur L de tuyau (diffusion dans conduite et gaine, et échanges conducto-convectif entre eau-conduite et isolant-air)

❖ En supposant que le coefficient de convection solide-air ne dépend pas de la nature du solide, montrer que r_2 doit dépasser une valeur minimale r_{2_c} pour que l’ajout d’une mince couche d’isolant ait bien l’effet escompté. La laine de verre ayant une conductivité de l’ordre de $0,03\ W.m^{-1}.K^{-1}$ et le coefficient de convection étant de $6,5\ W.m^{-2}.K^{-1}$, la condition précédente est-elle difficile à remplir ?

❖ De l’eau est immobile à température T_e dans une longueur L de conduite (C est la capacité thermique de l’ensemble eau + conduite). On appelle R_{th} la résistance thermique totale de la longueur L de conduite (pas à calculer). Déterminer l’évolution temporelle de la température de l’eau (hyp : elle reste uniforme).

Réponse :

$R_{th} = \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi\lambda_1 L} + \frac{\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)}{2\pi\lambda_2 L} + \frac{1}{2\pi r_1 h_1 L} + \frac{1}{2\pi r_3 h_2 L}$

R_{th} est minimale pour $r_{3_c} = \frac{\lambda_2}{h_2}$;

évolution $T(t) = (T_e - T_0)e^{-t/(R_{th}C)} + T_0$

Le bloc 2 est consacré à la conduction thermique en relation avec le cours de thermodynamique de première année. Après avoir écrit les premier et second principes sous forme infinitésimale, on s’attache à l’étude de la diffusion thermique avec une visée applicative, concrète.

L’établissement de l’équation de diffusion thermique est limité au cas des systèmes de volume constant et les mises en équation locale sont faites exclusivement en géométries unidimensionnelles. On admet ensuite les formes générales des équations en utilisant les opérateurs d’analyse vectorielle, ce qui permet de traiter des problèmes tridimensionnels en fournissant les expressions de la divergence et du laplacien. Même si cette rubrique contribue à asseoir la maîtrise des opérateurs d’analyse vectorielle (gradient, divergence, laplacien), le formalisme doit rester au deuxième plan.

L’étude de l’équation de diffusion thermique sans terme source, en régime stationnaire est menée par analogie avec l’électrocinétique. La notion de résistance thermique, dont la connaissance des conditions d’application est aussi importante que son utilisation, ne doit pas rester théorique. Son intérêt doit être illustré par des exemples pratiques à forte ou à faible résistance thermique.

Aucune connaissance sur les termes sources n’est exigible sauf pour l’effet Joule. On néglige le rayonnement thermique. Dans le cadre de l’interface liquide-solide, la loi phénoménologique de Newton peut être utilisée, mais ni sa mémorisation ni aucune connaissance sur son établissement ne peuvent être exigées.

Aucune méthode générale de résolution ne peut être demandée aux étudiants, mais les solutions de l'équation de diffusion en géométrie unidimensionnelle cartésienne, sans terme source, en régime stationnaire ou en régime d’ondes harmoniques doivent être connues.

Notions et contenus	Capacités exigibles
2. Transfert thermique par conduction	
2.1. Formulation infinitésimale des principes de la thermodynamique	
Premier principe : $dU + dE_c = \delta W + \delta Q$ Deuxième principe : $dS = \delta S_e + \delta S_c$ avec $\delta S_e = \frac{\delta Q}{T_0}$ pour une évolution monotherme.	Énoncer et exploiter les principes de la thermodynamique pour une transformation élémentaire. Utiliser avec rigueur les notations d et δ en leur attachant une signification.

2.2. Équation de la diffusion thermique	
Les différents modes de transfert thermique : diffusion, convection et rayonnement.	Citer les trois modes de transfert thermique. Expliquer que la diffusion est un déplacement d'énergie de proche en proche dans la matière macroscopiquement immobile.
Vecteur densité de courant thermique $\boldsymbol{j}_Q$.	Exprimer le flux thermique comme le flux du vecteur $\boldsymbol{j}_Q$ à travers une surface orientée.
Équilibre thermodynamique local.	Utiliser les champs scalaires intensifs (volumiques ou massiques) associés à des grandeurs extensives de la thermodynamique.
Loi phénoménologique de Fourier.	Énoncer et utiliser la loi de Fourier. Citer quelques ordres de grandeur de conductivité thermique dans les conditions usuelles : air, eau, béton, acier.
Bilan d'énergie.	Pour un milieu évoluant à volume constant, établir l'équation locale traduisant le premier principe dans le cas d'un problème ne dépendant qu'une d'une seule coordonnée d'espace en coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques. Admettre et utiliser une généralisation en géométrie quelconque en utilisant l'opérateur divergence et son expression fournie.
Équation de la diffusion thermique.	Établir l'équation de diffusion vérifiée par la température, avec ou sans terme source. Analyser une équation de diffusion en ordre de grandeur pour relier des échelles caractéristiques spatiale et temporelle. Relier l'équation de diffusion à l'irréversibilité temporelle du phénomène. Exploiter la linéarité de l'équation de diffusion. Manipuler le terme source local et intégral de l'effet Joule.
Conditions aux limites.	Exploiter la continuité du flux thermique. Exploiter la continuité de la température pour un contact thermique parfait. Utiliser la relation de Newton (fournie) à l'interface solide-fluide. Traduire le contact avec une paroi calorifugée.
2.3. Régime stationnaire, ARQS	
Résistance ou conductance thermique.	Définir la notion de résistance thermique par analogie avec l'électrocinétique. Énoncer les conditions d'application de l'analogie. Établir l'expression de la résistance thermique d'un cylindre calorifugé latéralement. Exploiter des associations de résistances

	thermiques en série ou en parallèle.
ARQS, analogie électrocinétique avec un circuit RC.	Mettre en évidence un temps caractéristique d'évolution de la température. Justifier l'ARQS. Établir l'analogie avec un circuit électrique RC.
2.4. Ondes thermiques	
Relation de dispersion.	Établir la relation de dispersion des ondes thermiques en géométrie unidirectionnelle.
Effet de peau thermique.	Mettre en évidence le déphasage lié à la propagation. Établir une distance caractéristique d'atténuation.

NB : le ondes thermiques seront traitées plus tard, lors du cours sur les ondes

Détails *complémentaires*

Savoirs :

- Relation entre énergie et température (capa thermique)
- Equation locale conservation de l'énergie + termes création et disparition
- Loi Fourier + signification physique
- Ordres de grandeur conductivité et diffusivité
- Définition résistance thermique (*régime stationnaire + ARQS uniquement*)
- *Analogies* thermique / électrique

Savoirs faire :

- Effectuer bilan d'énergie (géométrie unidimensionnelle, cartésien, cylindrique, sphérique)
- En déduire équation locale de conservation
- Via Fourier et capa thermique, en déduire l'équation de diffusion
- Retrouver la relation entre L_c et τ_c
- Associer des résistances thermiques en série ou en parallèle
- Repérer les situations où l'ARQS est vérifiée et la notion de résistance thermique applicable