

1. Débit d'une quantité à travers une surface

- 1.1. Définition du débit de masse
- 1.2. Définition du « vecteur débit surfacique » ou « vecteur densité de courant »
- 1.3. Vocabulaire mathématique : « Flux d'un champ de vecteur à travers une surface »
- 1.4. Lien entre le vecteur densité de courant et la vitesse moyenne des « porteurs »

2. Lois de conservation

- 2.1. Distinction loi universelle – loi phénoménologique
- 2.2. Distinction système fermé / système ouvert
- 2.3. Equation *intégrale* de conservation (système *ouvert macroscopique*)
- 2.4. Interprétation physique de l'opérateur **div** : Théorème de flux-divergence (Ostrogradski)
- 2.5. Equation *locale* de conservation (système *ouvert mésoscopique*)
- 2.6. Etablissement de l'équation locale par un bilan de masse (cas unidimensionnel)
- 2.7. Lois de conservation en régime « stationnaire » (ou « permanent »)

Intro :

Parce qu'on retrouve ces concepts dans l'étude de tous les phénomènes de transport, ce chapitre d'introduction regroupe les notions de *débit*, de *vecteur densité de courant*, de *flux*, de *lois de conservation* écrites sous forme d'équation *intégrale* ou *locale*.

Pour aborder ces généralités de manière concrète, on prendra l'exemple du transport de masse par un fluide. Dans les prochains chapitres seront abordés les transports : de charge électrique, d'énergie thermique, de particules, de fluide (masse et volume).

Ce n'est pas au programme, mais on pourrait aussi étudier le transport de voiture sur une route (débit autoroutier), le débit de spin up dans un circuit en électronique de spin. Bref, toute grandeur susceptible de se déplacer d'un point de l'espace à un autre peut être étudiée avec les notions abordées ici.

1. Débit d'une quantité à travers une surface

Pour rendre plus concrètes les notions abordées, on prend l'exemple d'un fluide en mouvement (eau d'une rivière, eau dans une canalisation, air soufflé par un ventilateur). On s'intéresse alors au transport de *masse* dans l'espace, associé au mouvement du fluide (on pourrait aussi choisir d'étudier le transport de *volume*, ou *d'énergie*). Dans ce cas, on dit que le fluide *transporte de la masse*.

1.1. Définition du débit de masse

Définition du débit de masse D_m

Le débit de masse est la masse de fluide qui traverse une surface donnée, par unité de temps ($\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$) :

$$\delta m_{\text{trav}} \stackrel{\text{def}}{=} D_m dt$$

Si la surface est orientée, le débit de masse est une grandeur algébrique.

Son signe renseigne alors sur le sens de l'écoulement.

On parle plus fréquemment de « débit massique » (mais appellation trompeuse)

Remarque : Lorsque le sens de l'écoulement est connu, il est préférable de travailler avec des débits de masse définis positifs (donc d'orienter les surfaces dans le sens de l'écoulement).

Relation entre la masse transférée et le débit de masse

La masse totale qui traverse la surface considérée pendant une durée $(t_2 - t_1)$, est donné par :

$$m_{trav} = \int_{t_1}^{t_2} D_m dt$$

Cette définition se généralise à tous les phénomènes de transport. Si on appelle « truc » la quantité transportée, l'unité du « débit de truc à travers une surface » est en $(truc \cdot s^{-1})$.

1.2. Définition du « vecteur débit surfacique » ou « vecteur densité de courant »

Si le débit n'est pas uniforme sur toute la surface, on se place à l'échelle mésoscopique (i.e. sur une surface élémentaire \vec{dS}) pour définir un **débit par unité de surface**.

Si l'écoulement est complexe (ex : remous en aval de l'hélice d'un bateau), la direction de l'écoulement peut ne pas être la même en tout point de la surface considérée. C'est pourquoi on incorpore cette information (direction et sens de l'écoulement au niveau de la surface élémentaire) dans la définition du débit à l'échelle mésoscopique. Ce « vecteur débit surfacique » est plutôt appelé **vecteur densité de courant**. En général, il est noté \vec{j} .

- Expliquer en quoi l'écriture mathématique du débit élémentaire $\delta D_m = \vec{j} \cdot \vec{dS}$ est cohérente avec l'information représentée par la direction et le sens du vecteur \vec{j} au niveau de la surface élémentaire \vec{dS}
- Quelle est l'unité du vecteur densité de courant de masse ?

Définition du vecteur densité de courant de masse

Le vecteur densité de courant, noté \vec{j} , est le débit surfacique défini par la relation :

$$D_m \stackrel{\text{def}}{=} \iint_{M \in \text{Surface}} \vec{j}(M) \cdot \vec{dS}$$

La direction et le sens du vecteur $\vec{j}(M)$ sont ceux de « l'écoulement » considéré localement en un point M

Cette définition se généralise à tous les phénomènes de transport. Si on appelle « truc » la quantité transportée, l'unité du « vecteur densité de courant de truc » est en $(truc \cdot s^{-1} \cdot m^{-2})$.

1.3. Vocabulaire mathématique : « Flux d'un champ de vecteur à travers une surface »

Le flux d'un champ vectoriel \vec{V} à travers une surface est l'opérateur F qui agit sur \vec{V} pour donner le scalaire :

$$F(\vec{V}) = \iint_{M \in \text{Surface}} \vec{V}(M) \cdot \vec{dS}$$

Ainsi, d'après le paragraphe précédent, tout débit est le flux du vecteur densité de courant associé.

La réciproque est fautive. Tous les flux ne sont pas nécessairement des débits :

- flux du champ magnétique à travers une surface (vu en PCSI)
- flux du champ électrique à travers une surface (sera vu cette année)

Ces flux ne représentent rien d'observable, ce sont des quantités véritablement abstraites. On les définit car ils interviennent dans des lois physiques fondamentales, mais on ne peut pas se représenter ces quantités à partir de notre expérience courante des phénomènes physiques.

Mise en garde de vocabulaire

Le mot « flux » est souvent utilisé de manière abusive, en lieu et place de « débit ».

Exemple : « On considère un flux de masse à travers telle surface »
au lieu de : « on considère un débit de masse à travers telle surface ».

Cette année, on étudiera les débits suivants :

- débit de particules (chapitre transport de particules)
- débit de chaleur (chapitre conduction thermique, cas particulier de débit d'énergie)
- débit d'énergie $\stackrel{\text{def}}{=} \text{Puissance !}$ (électrique, therm(odynam)ique, mécanique, électromagnétique)
- débit de volume
- débit de masse
- débit de charge $\stackrel{\text{def}}{=} \text{Intensité du courant électrique !}$ (chapitre transport de charge)

1.4. Lien entre le vecteur densité de courant et la vitesse moyenne des « porteurs »

Lorsque la grandeur transportée est « véhiculée » par des corpuscules *en mouvement à l'échelle macroscopique*, il est possible de relier le vecteur densité de courant à la *vitesse moyenne des porteurs* ou « vitesse de dérive ».

Vitesse moyenne « de l'écoulement »

La « vitesse moyenne des porteurs » ou « vitesse moyenne de l'écoulement » ou « vitesse de dérive » est la moyenne statistique des vitesses microscopiques d'un grand nombre de porteurs.

Elle est définie à l'échelle mésoscopique.

Il est essentiel de ne pas confondre cette vitesse moyenne et la vitesse d'un porteur isolé.

Concrètement : dans le cas d'un fluide en mouvement macroscopique, il est clair que la *vitesse d'écoulement* du fluide (de l'ordre du $m \cdot s^{-1}$ en général) **n'a rien à voir** avec la vitesse des molécules à l'échelle *microscopique* (dominée par l'agitation thermique, de l'ordre de qq $100 m \cdot s^{-1}$). La vitesse de l'écoulement est définie à l'échelle *mésoscopique*.

Expression du vecteur densité de courant de masse en fonction de la vitesse du fluide

Le vecteur densité de courant de masse s'exprime en fonction de la masse volumique et de la vitesse du fluide

$$\vec{j}(\mathbf{M}) = \rho(\mathbf{M}) \vec{v}(\mathbf{M})$$

Démonstration :

- Relier le débit de masse à la vitesse du fluide dans le cas simple d'une conduite rectiligne avec champ de vitesse uniforme
- Cas champ de vitesse non uniforme : raisonnement idem mais au niveau d'une surface élémentaire

On retiendra ce résultat général : lorsqu'il existe des porteurs de la grandeur « truc », le vecteur densité de courant de « truc » \vec{j} s'exprime en fonction du « truc » volumique ρ et de la vitesse moyenne des porteurs \vec{v} . Presque tous les phénomènes de transport que l'on va étudier sont associés à des porteurs, sauf le transport d'énergie thermique par conduction.

2. Lois de conservation

Tous les phénomènes de transport seront associés à une *loi de conservation* : conservation du nombre de particules (en l'absence de réactions chimiques), conservation de l'énergie (cas transport énergie thermique), conservation de la charge (courant électrique), conservation de la masse (écoulement d'un fluide) et parfois du volume (écoulement d'un fluide incompressible).

Dans cette partie, on va *exprimer* la loi de conservation de la masse dans différentes situations :

- pour des systèmes fermés, puis pour des systèmes ouverts
- à l'échelle macro, puis à l'échelle méso

Tout ce que l'on dira ici pour la masse sera aussi valable pour les autres phénomènes de transport.

2.1. Distinction loi universelle – loi phénoménologique

Avant cela, il est important de distinguer en physique (quelque soit le domaine étudié) :

- les lois *universelles* : valables « quelque soit la situation étudiée », ce qui n'empêche pas de pouvoir se retravailler parfois à une sous-classe de phénomènes (exemple : conservation de la masse fautive en physique des particules, conservation de l'élément chimique fautive en physique nucléaire)
- les lois *phénoménologiques* : observées dans certaines conditions expérimentales, on ne cherche pas nécessairement à les comprendre (i.e. à les expliquer à partir d'autres lois plus fondamentales)

Exemple de lois universelles :

- loi de la gravitation concernant les corps massifs, *valable quelque soit la nature* du corps
- loi des gaz parfait appliquée aux gaz dilués, *valable quelque soit la nature* du gaz
- principes de la thermo, *valables quelque soit le phénomène étudié* (système ou transformations)
- lois de conservation : énergie, charge, masse, élément chimique
- etc...

Exemple de lois phénoménologiques :

- loi d'Ohm, *pas valable pour tous les matériaux*
- Réponse en traction d'un matériau (i.e. force d'un ressort), *pas valable pour tous les matériaux*
- loi de Fourier et loi de Fick (on les verra dans les prochains chapitres)

Difficile de donner des définitions qui « marchent à tous les coups ». En effet, certaines lois universelles ne le sont pas vraiment car elles ne sont pas valables dans absolument toutes les situations. Mais dans ce cas, on peut généralement donner un critère simple pour savoir quand elles cessent d'être valables (exemple : conservation de l'élément chimique valable tant que les énergies mises en jeu lors des transformations sont très inférieures au MeV). Lorsqu'elles cessent d'être valables, on montre généralement qu'elles ne sont que l'expression déguisée d'une loi plus générale (la conservation de l'élément chimique est une version déguisée de la conservation de l'énergie).

Quant aux lois phénoménologiques, elles sont en général tôt ou tard reliées à des lois universelles de manière plus ou moins directes, plus ou moins dépendantes des conditions expérimentales (exemple : la loi d'ohm peut être démontrée sous certains hypothèses à partir de lois fondamentales et universelles de la physique). La différence importante avec les lois universelles, c'est qu'on ne retrouve pas ces lois phénoménologiques dans d'autres domaines de la physique (on ne rencontre pas la loi d'ohm à chaque fois que l'on étudie des porteurs de charge, alors qu'on a nécessairement recours à la loi universelle de conservation de la charge).

2.2. Distinction système fermé / système ouvert

Définition systèmes fermés / ouverts

*Un système **fermé** ne peut pas échanger de matière avec l'extérieur.*

*Un système **ouvert** peut échanger de la matière avec l'extérieur.*

- On veut étudier l'écoulement d'eau dans une conduite. Il faut pour cela isoler une partie du fluide pour l'étudier, i.e. définir un système. Sur un dessin, essayer de définir un système fermé, puis un système ouvert

Pourquoi se laisser ce choix ?

- toutes les lois fondamentales de la physique sont énoncées pour des systèmes fermés
- expérimentalement, il est généralement plus facile de mesurer l'évolution d'un système ouvert

Le système fermé est avantageux du point de vue théorique. Le système ouvert est avantageux du point de vue expérimental (il peut l'être aussi pour mener des calculs). L'objectif du physicien étant de faire le lien entre la théorie et l'expérience, il est bien obligé d'utiliser ces deux types de systèmes.

2.3. Equation intégrale de conservation (système ouvert macroscopique)

Il y a deux façons d'écrire les lois de conservation :

- à l'échelle **macroscopique** : équation **intégrale** (formules sans dérivées spatiales)
- à l'échelle **mésoscopique** : équation **locale** (formules avec dérivées spatiales)

Lorsqu'on écrit une loi de conservation sous forme intégrale :

- on ne cherche pas à savoir ce qui se passe en tout point
- les équations sont donc indépendantes de la position
- l'équation est plus simple à résoudre
- on peut éviter d'étudier des zones problématiques
- on perd de l'information

On énonce ci-dessous la loi de conservation de la masse pour un système fermé puis pour un système ouvert.

Loi de conservation de la masse pour un système fermé

La masse d'un système fermé est constante au cours du temps : $m^*(t) = C^{te}$

Loi de conservation de la masse pour un système ouvert

Un système **ouvert** voit sa masse varier de la manière suivante pendant une durée élémentaire dt :

$$dm = \delta m_e - \delta m_s$$

donc

$$\frac{dm}{dt} = D_{m_e} - D_{m_s}$$

« L'augmentation du stock est égale à ce qui entre, moins ce qui sort »

- Comprendre cette formule signifie d'être capable d'expliquer la signification de chacun des trois termes en s'aidant d'un schéma (dans cette formule, masse entrante et sortante sont définies positives, sinon il ne sert à rien de l'écrire sous cette forme) : le faire dans le cas simple d'une conduite rectiligne
- Dans le cas d'une rencontre entre trois conduites, écrire cette loi pour le système ouvert centré sur le point de rencontre, sous plusieurs formes possibles selon qu'on oriente les vecteurs \vec{dS} des interfaces :
 - tous vers l'extérieur
 - tous vers l'intérieur
- Ce lien entre l'écriture mathématique d'une formule et le sens des flèches sur un schéma vous rappelle-t-il une situation déjà rencontrée ?
- Lorsqu'on souhaite écrire cette équation de conservation alors que le sens réel de l'écoulement est inconnu, on oriente les vecteurs \vec{dS} tous dans le même sens, convergent ou divergent. Chacun des débits de l'équation est alors algébrique. Lors d'une application numérique, quelle est la signification du signe d'un débit ?

2.4. Interprétation physique de l'opérateur $div(\)$: Théorème de flux-divergence (Ostrogradski)

Les significations physiques des équations intégrale et locale sont les mêmes, c'est juste l'écriture qui diffère.

Pour comprendre la signification de l'équation locale, un théorème d'analyse vectorielle est très utile, c'est le Théorème de flux-divergence, ou Théorème d'Ostrogradski (au programme).

Théorème de flux-divergence

Soit un champ vectoriel \vec{A} défini en tout point du volume V considéré :

$$\oiint_{S \text{ autour } V} \vec{A} \cdot \vec{dS} = \iiint_V \text{div}(\vec{A}) d\tau$$

- Citer ce théorème signifie de pouvoir dessiner la surface S et le volume V

Remarques :

- Le symbole « rond » figurant sur l'intégrale double signifie que la **surface S est une surface fermée** (i.e. elle délimite un volume)
- Le volume V est justement le **volume délimité** par la surface fermée S

2.5. Equation locale de conservation (système ouvert mésoscopique)

Lorsqu'on écrit une loi de conservation sous forme locale :

- on cherche à savoir ce qui se passe en tout point
- on ne perd aucune information (sauf l'échelle microscopique, mais qui ne nous intéresse pas ici)
- ce sont des équations aux dérivées partielles, où apparaissent des *dérivées spatiales*
- intérêt : permet d'étudier des phénomènes complexes (turbulences dans un fluide)
- parfois impossible à résoudre analytiquement (à la main), recours à l'outil numérique (ordinateur)

Equation locale de conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\vec{j}) = 0$$

- Pour la démontrer, il suffit d'écrire la loi intégrale de conservation de la masse sur un système mésoscopique $d\tau$, en orientant nécessairement les interfaces vers l'extérieur du système
- Faire apparaître la masse volumique. Transformer le flux sortant en intégrale sur le volume (Ostrogradski)
- Equation vraie quelque soit le volume considéré, volume élémentaire entre autre : enlève intégrales

2.6. Etablissement de l'équation locale par un bilan de masse (cas unidimensionnel)

Dans le paragraphe précédent, on a établi l'équation locale de conservation de la masse dans le cas général à l'aide du théorème d'Ostrogradski. Le programme stipule également que l'on doit pouvoir établir l'équation locale à partir d'un bilan de masse effectué sur un volume élémentaire, dans le cas unidimensionnel. C'est ce qui vous sera généralement demandé aux concours (peu probable qu'on vous demande d'utiliser Ostrogradski).

- En considérant une tranche élémentaire d'une conduite rectiligne (système ouvert immobile), tranche repérée sur l'axe horizontal par l'intervalle $[x, x + dx]$, « effectuer un bilan de masse » (i.e. écrire l'équation intégrale de conservation de la masse) pour en déduire l'équation locale de conservation

2.7. Lois de conservation en régime « stationnaire » (ou « permanent »)

Définition du régime stationnaire (ou permanent)

*En régime stationnaire, toutes les grandeurs d'un système ouvert sont indépendantes du temps.
De plus, tous les champs sont indépendants du temps.*

Loi de conservation de la masse en régime stationnaire (équations intégrale et locale)

$$D_{m_e} = D_{m_s}$$

$$\text{div}(\vec{j}) = 0$$

A tout instant, il y a autant de masse qui entre que de masse qui sort.

Cette partie présente le formalisme nécessaire à l'étude générale des phénomènes de transport abordés au programme de PSI (conduction électrique, conduction thermique, diffusion de particules, fluides en écoulement). Ce formalisme, transversal à tous les domaines de la physique, repose essentiellement sur la notion de bilan, global ou local. Il permet d'exprimer des lois de conservation (charge, énergie, masse), d'établir des équations d'évolution en relation avec des propriétés phénoménologiques.

Le professeur pourra aborder les différentes notions dans l'ordre qu'il souhaite, en relation avec les autres parties du programme. Il est cependant essentiel de faire apparaître les analogies et les différences entre les domaines d'étude.

Objectifs de formation

- Utiliser les trois échelles macroscopique, microscopique, mésoscopique.
- Réaliser des bilans sous forme globale et locale.
- Mettre en évidence l'analogie entre les différentes équations locales traduisant le bilan d'une grandeur scalaire extensive.
- Distinguer une loi phénoménologique et une loi universelle.
- Manipuler des équations aux dérivées partielles (analyse en ordre de grandeur, conditions initiales, conditions aux limites).

Champ eulérien des vitesses : vitesse de la particule de fluide.	Distinguer vitesse microscopique et vitesse mésoscopique.
Masse volumique μ , vecteur densité de courant de masse $\mu \mathbf{V}$.	Citer des ordres de grandeur des masses volumiques de l'eau et de l'air dans les conditions usuelles.
Débit massique.	Définir le débit massique et l'écrire comme le flux du vecteur $\mu \mathbf{V}$ à travers une surface orientée.
Conservation de la masse.	Écrire les équations bilans, globale ou locale, traduisant la conservation de la masse.

Notions et contenus	Capacités exigibles
2. Analyse vectorielle	
a) gradient	Relier le gradient à la différentielle d'un champ scalaire à t fixé. Exprimer les composantes du gradient en coordonnées cartésiennes.
b) divergence	Citer et utiliser le théorème d'Ostrogradski. Exprimer la divergence en coordonnées cartésiennes.