Chap.1 Doc principal
Changements de référentiels – Cinématique

Intro :
Le mouvement d'un point matériel dépend du référentiel dans lequel on se place pour l'étudier. Dans ce chapitre, on va établir les formules qui permettent « d'unifier les points de vue », i.e. de ***relier les différentes observations d'un même mouvement vu depuis des référentiels différents***. Cela revient à relier mathématiquement la vitesse de l'objet vu depuis un référentiel à sa vitesse vue depuis un autre référentiel. Idem pour l'accélération.

On ne s'intéresse dans ce chapitre qu'aux ***grandeurs cinématiques***, i.e. qui décrivent le mouvement. On n'évoquera les causes du mouvement (les forces) que dans le chapitre suivant.

La démonstration dans le cas général des formules de changement de référentiel, ***les lois de composition***, n'est pas exigible. Il s'agit surtout de savoir les retrouver et les utiliser dans les deux cas particuliers au programme :
- référentiel en ***translation*** par rapport à un autre référentiel
- référentiel ***en rotation uniforme autour d'un axe fixe*** par rapport à un autre référentiel

Attention *: Dans ce chapitre, il est* **impératif de toujours préciser le référentiel** *depuis lequel on considère le mouvement. Cela pouvait sembler fastidieux en PCSI, c'est absolument nécessaire à présent.*

1. Relativité du mouvement

1.1. Constatation de la relativité du mouvement

Vidéos : https://www.youtube.com/watch?v=ck6FbMXSgL4
https://www.youtube.com/watch?v=49JwbrXcPjc

Ces deux exemples montrent bien que la trajectoire d'un objet dépend du référentiel depuis lequel on l'observe.

1.2. Définition d'un référentiel (rappel)

La trajectoire, la vitesse, l'accélération (en un mot « le mouvement ») d'un objet dépend du « point de vue » depuis lequel on l'observe (expérimentalement), ou depuis lequel on le calcule (théoriquement).

Que l'étude soit expérimentale ou théorique, il faut toujours préciser ***une référence***. C'est la signification de la phrase « tout mouvement est relatif ». *Relatif* s'oppose à *absolu* (qui ne nécessite aucune référence).

Définition d'un référentiel
*C'est un **repère de référence**, celui **défini arbitrairement comme fixe** pour étudier le mouvement d'un objet.*

- **Activité 1 : S'approprier**

Attention à bien faire la distinction entre repère et référentiel. Dans le cas du pendule simple, on ne choisit jamais le repère polaire comme référentiel pour étudier le mouvement du pendule…

Remarque : Un solide peut être utilisé pour définir un référentiel, puisqu'il suffit de définir un repère « accroché » au solide, et de le choisir comme référence. Si un exercice définit le référentiel à l'aide d'un solide, il faut alors spécifier un repère cartésien de sa propre initiative.

1.3. Dérivée temporelle d'une grandeur physique par rapport à un référentiel

On rappelle que l'étude du mouvement se ramène *mathématiquement* à l'étude de l'évolution temporelle d'un certain nombre de grandeurs : vecteur position, vecteur vitesse, vecteur accélération, énergie cinétique, puissance d'une force, vecteurs unitaires d'un repère cylindrique, etc…

Or le choix du référentiel a des conséquences sur « la rapidité » avec lesquelles ces grandeurs physiques évoluent dans le temps. Traduction math : la dérivée temporelle d'une grandeur dépend a priori du référentiel choisi.

Il existe des formules mathématiques permettant de relier les dérivées temporelles calculées dans différents référentiels. Elles ne sont pas exigées par le programme. Pour la construction de la suite du cours, on se limitera donc à la règle suivante : *si l'on souhaite calculer la dérivée temporelle d'une grandeur physique dans un référentiel R, il faudra d'abord s'assurer d'avoir exprimé toutes les grandeurs dont elle dépend dans la BOND cartésienne fixe définissant R* (à ne pas retenir pour les concours, car très hors programme).

Notation : Si dans un même raisonnement on est amené à dériver une grandeur par rapport à deux référentiels différents R_1 et R_2, on peut utiliser la notation suivante pour distinguer les différentes dérivées : $\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{R_1}$ et $\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{R_2}$

1.4. Objectif du chapitre : relier mathématiquement trois mouvements

Dans ce chapitre, on va considérer le mouvement d'un point matériel M dans deux référentiels, ceux-ci étant en mouvement l'un par rapport à l'autre.
*On sera donc amener à distinguer **trois mouvements** :*
- le mouvement du référentiel R_2 par rapport au référentiel R_1
- le mouvement de M par rapport au référentiel R_1
- le mouvement de M par rapport au référentiel R_2

En science, on part du postulat qu'il existe une réalité indépendante de nos observations. Lorsqu'un objet est en mouvement, bien que les trajectoires perçues par différents observateurs puissent être différentes, il doit être possible d'unifier tous ces points de vue.
Autrement dit, connaissant le mouvement de R_2 par rapport à R_1, on s'attend donc à ce que le mouvement de M dans R_2 puisse être ***mathématiquement*** déduit de son mouvement dans R_1 (et inversement).

L'objectif de ce chapitre est d'établir ces formules mathématiques pour la vitesse et l'accélération. Pour cela, il faut d'abord pouvoir décrire mathématiquement le mouvement d'un référentiel par rapport à l'autre.

2. Description du mouvement d'un référentiel par rapport à un autre

2.1. Définition du référentiel « relatif » R_2 et du référentiel « absolu » R_1

Par convention, on distingue :
- le référentiel « absolu » R_1, associé à un repère $\left(O_1\,;\overrightarrow{e_x}\,,\ \overrightarrow{e_y}\,,\ \overrightarrow{e_z}\right)$
- le référentiel « relatif » R_2, associé à un repère $\left(O_2\,;\overrightarrow{e_x'},\ \overrightarrow{e_y'},\ \overrightarrow{e_z'}\right)$

Les qualificatifs absolu/relatif sont ici arbitraires, et n'ont aucune signification profonde. Ils permettent ici de convenir implicitement qu'on introduira dans nos calculs le mouvement de R_2 par rapport à R_1, et non pas l'inverse (c'est aussi possible, mais il faut faire un choix).

Dans une situation concrète, on distribue « comme ça nous arrange » les rôles de référentiel absolu / relatif aux deux référentiels du problème. Dans l'exemple du vélo, on peut choisir indifféremment :
- le référentiel terrestre comme absolu : on étudie alors le mouvement du cadre de vélo R_2 par rapport au sol R_1
- le référentiel lié au cadre comme absolu : on étudie alors le mouvement du sol R_2 par rapport au cadre R_1

En exercice, il s'agira de faire le choix le plus pratique en fonction des données de l'énoncé. Dans l'exemple du vélo, l'énoncé précisera généralement le mouvement du cadre du vélo par rapport au sol, et non l'inverse. Il sera alors plus pratique de choisir le référentiel terrestre comme référentiel absolu R_1.

2.2. Comment décrire le mouvement de R_2 dans R_1 ?

Le mouvement du référentiel relatif (par rapport au référentiel absolu) est donné par le mouvement du repère qui lui est associé. Ce repère $\left(O_2\,;\overrightarrow{e_x'},\overrightarrow{e_y'},\overrightarrow{e_z'}\right)$ est caractérisé par une origine et trois vecteurs unitaires.

Le mouvement de R_2 par rapport à R_1 est défini par : ▪ le mouvement de son origine : $\left(\frac{d\overrightarrow{O_1O_2}}{dt}\right)_{R_1}$ ▪ les rotations de chacun des vecteurs unitaires : $\left(\frac{d\overrightarrow{e_x'}}{dt}\right)_{R_1}$; $\left(\frac{d\overrightarrow{e_y'}}{dt}\right)_{R_1}$; $\left(\frac{d\overrightarrow{e_z'}}{dt}\right)_{R_1}$

2.3. Cas particulier n°1 : mouvement de translation

Définition d'un mouvement de translation de R_2 par rapport à R_1

R_2 effectue un mouvement de translation par rapport à R_1
*si les **directions des vecteurs unitaires** de R_2 sont **indépendantes du temps** :*

$$\left(\frac{d\overrightarrow{e_x{}'}}{dt}\right)_{R_1} = \vec{0} \qquad \left(\frac{d\overrightarrow{e_y{}'}}{dt}\right)_{R_1} = \vec{0} \qquad \left(\frac{d\overrightarrow{e_z{}'}}{dt}\right)_{R_1} = \vec{0}$$

*On décrit alors complètement le mouvement de R_2 dans R_1 par **le mouvement de son origine O_2** $\left(\frac{d\overrightarrow{O_1O_2}}{dt}\right)_{R_1}$.*

- **Activité 2 : S'approprier**

2.4. Cas particulier n°2 : mouvement de rotation uniforme autour d'un axe fixe

Définition d'un mouvement de rotation uniforme de R_2 autour d'un axe fixe dans R_1

*R_2 effectue un mouvement de **rotation uniforme autour d'un axe fixe** si :*
- *on peut définir **son origine O_2 fixe** dans R_1*
- *ses vecteurs unitaires sont **en rotation autour d'un axe fixe** dans R_1*
- *la **vitesse angulaire ω** de rotation est **constante***

Sans perte de généralité, on pourra toujours définir les repères de R_1 et R_2 de sorte que :
- l'axe $(O_1, \overrightarrow{e_z})$ est l'axe de rotation
- les origines O_1 et O_2 sont confondues
- les axes $\overrightarrow{e_z}$ et $\overrightarrow{e_z{}'}$ sont confondus ($\overrightarrow{e_z{}'}$ est immobile dans R_1)

*On décrit alors complètement le mouvement de R_2 dans R_1 par la donnée **du vecteur rotation** :*

$$\vec{\Omega} = \omega\, \overrightarrow{e_z}$$

On pourrait d'ailleurs le nommer « vecteur vitesse angulaire ».

- **Activité 3 : S'approprier**

Hors programme : Il est facile d'exprimer les dérivées temporelles des vecteurs de la BOND de R_2 grâce au vecteur rotation, illustrant ainsi son utilité pour décrire mathématiquement la rotation de R_2 dans R_1

$$\left(\frac{d\overrightarrow{e_x{}'}}{dt}\right)_{R_1} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{e_x{}'} \qquad \left(\frac{d\overrightarrow{e_y{}'}}{dt}\right)_{R_1} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{e_y{}'}$$

2.5. Ne pas confondre translation circulaire et rotation

R_2 est en **translation circulaire** dans R_1 lorsque la **trajectoire de son origine O_2 est un cercle**.
R_2 est en **rotation** dans R_1 si **ses vecteurs unitaires changent de direction**.

- **Activité 4 : Exemples classiques**

2.6. *(Culturel HP)* Cas général : décomposition en une translation et une rotation

Le cas général d'un mouvement quelconque de R_2 ne sera jamais traité en exercice. Même si l'on va établir les lois de composition des vitesses et des accélérations dans le cas général, seuls les calculs dans les deux cas particuliers envisagés jusqu'à présent sont exigibles.
L'idée clef est qu'un mouvement quelconque de R_2 peut se décomposer en un mouvement de translation et un mouvement de rotation autour d'un axe *non fixe*. On peut alors exprimer les lois de composition (pour les vitesses et les accélérations) en fonction du vecteur rotation instantané. On ne le fera pas.

3. Référentiel relatif R_2 en translation : lois de composition

On va établir la relation mathématique entre les vitesses (resp. les accélérations) d'un point matériel M observé dans deux référentiels en translation l'un par rapport à l'autre. Les démonstrations générales ne sont pas exigibles. Il s'agira de les retrouver grâce à la notion de point coïncident.

3.1. Loi de composition des vitesses

Loi de composition des vitesses

$$\boldsymbol{\vec{v}_{M/R_1} = \vec{v}_{M/R_2} + \vec{v}_e}$$

avec $\boldsymbol{\overrightarrow{v_e} = \left(\frac{d\overrightarrow{O_1O_2}}{dt}\right)_{R_1}}$ *la **vitesse d'entraînement**. Elle représente le mouvement de R_2/R_1*

La démonstration est hors programme, elle est donnée dans l'annexe de calcul. Le programme stipule de retenir les deux ingrédients nécessaires à la démonstration : la relation de Chasles et le caractère absolu du temps.

3.2. Loi de composition des accélérations

Loi de composition des accélérations

$$\vec{a}_{M/R_1} = \vec{a}_{M/R_2} + \vec{a}_e$$

avec $\overrightarrow{a_e} = \left(\frac{d^2\overrightarrow{O_1O_2}}{dt^2}\right)_{R_1}$ *l'accélération d'entraînement.*

On l'obtient en dérivant dans R_1 la loi de composition des vitesses, et en suivant les mêmes étapes qu'au 3.1.

3.3. Le point coïncident : un outil pour retrouver la vitesse (resp. l'accélération) d'entraînement

Remarque : Il est possible de démontrer les affirmations ci-dessous dans le cas d'un mouvement quelconque de R_2 dans R_1. Conformément au programme, on se limitera à les admettre dans le cas particulier d'un mouvement de translation de R_2 dans R_1.

On admet que la vitesse (resp. l'accélération) d'entraînement peut s'interpréter comme la vitesse dans R_1 d'un point *P confondu* avec le point *M* à l'instant *t*, et *immobile dans* R_2.

Définition du point coïncident

On définit un point coïncident à chaque instant t.
C'est le point ***P qui coïncide avec M** à l'instant t considéré*, ***PUIS qui reste immobile dans*** $\boldsymbol{R_2}$.

On admet que le point coïncident P permet de calculer la vitesse et l'accélération d'entraînement :

$$\vec{v}_{P/R_1} = \vec{v}_e$$
$$\vec{a}_{P/R_1} = \vec{a}_e$$

Remarque : Ici, on remarque que l'accélération d'entraînement est égale à la dérivée de la vitesse d'entraînement. Ce n'est vrai que dans le cas particulier d'un mouvement de translation de R_2 dans R_1.

3.4. Exemple : mouvement de la valve d'une roue de vélo

- **Activité 5 : Exemple canonique**

4. Référentiel R_2 en rotation uniforme autour d'un axe fixe : lois de composition

On va établir la relation mathématique entre les vitesses (resp. les accélérations) d'un point matériel M observées dans deux référentiels en rotation l'un par rapport à l'autre autour d'un axe fixe. Les démonstrations générales ne sont pas exigibles. Il s'agira de les retrouver grâce à la notion de point coïncident.

4.1. Loi de composition des vitesses

Loi de composition des vitesses

$$\vec{v}_{M/R_1} = \vec{v}_{M/R_2} + \vec{v}_e$$

avec $\overrightarrow{v_e} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}$

On note O l'origine commune des deux référentiels.
Le calcul est hors programme, donné en annexe. On retient là encore la nécessité d'invoquer la relation de Chasles et le caractère absolu du temps.

4.2. Loi de composition des accélérations

Loi de composition des accélérations

$$\vec{a}_{M/R_1} = \vec{a}_{M/R_2} + \vec{a}_e + \overrightarrow{a_c}$$

(avec $\overrightarrow{a_e} = -\omega^2\overrightarrow{HM}$ et $\overrightarrow{a_c} = 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{M/R_2}$)

Pas nécessaire de retenir ces deux dernières formules, on les reverra plus tard

Le calcul, hors programme est donné en annexe.
L'accélération $\overrightarrow{a_e}$ l'accélération d'entraînement, nommée ainsi car elle s'identifie à l'accélération du point coïncident (admis, on le vérifiera sur un exemple).

On remarque un terme supplémentaire par rapport au cas de la translation : l'accélération $\overrightarrow{a_c}$ s'appelle ***l'accélération de Coriolis*** (ou *accélération complémentaire*). Pour calculer l'accélération de Coriolis, il n'existe pas de notion équivalente au point coïncident. On ne peut que se souvenir par cœur de son expression.
On retiendra que :

- $\overrightarrow{a_c} = \vec{0}$ si ***M est immobile dans R_2***
- $\overrightarrow{a_c} \perp \vec{v}_{M/R_2}$ toujours

4.3. Le point coïncident : un outil pour trouver la vitesse (resp. l'accélération) d'entraînement

Remarque : Il est possible de démontrer les affirmations ci-dessous dans le cas d'un mouvement quelconque de R_2 dans R_1. Conformément au programme, on se limitera à les admettre dans ce 2^e cas particulier d'un mouvement de rotation uniforme de R_2 autour d'un axe fixe dans R_1.

On admet que le point coïncident P permet de calculer la vitesse et l'accélération d'entraînement :

$$\vec{v}_{P/R_1} = \vec{v}_e$$
$$\vec{a}_{P/R_1} = \vec{a}_e$$

Remarque : D'après les formules établies au 4.1 et 4.2, on remarque que $\overrightarrow{a_e} \neq \left(\frac{dv_e}{dt}\right)_{R_1}$!!

En effet, le point coïncident ***n'est pas un point matériel****, mais un point immatériel fictif.*

D'après sa définition, ***le point coïncident change à chaque instant*** **:** le point P utilisé pour déterminer $\overrightarrow{v_e}$ et $\overrightarrow{a_e}$ à l'instant t_1 ne peut pas être utilisé pour déterminer ces deux grandeurs à un instant $t_2 \neq t_1$.

Lorsque R_2 est en rotation dans R_1, les mouvements des points coïncidents successifs sont tous différents, *contrairement au cas de la translation* où les points coïncidents successifs avaient tous le même mouvement.

Conclusion : Il faut bien définir un point coïncident à l'instant t considéré lors du calcul. Si on envisage ensuite un instant précédent ou ultérieur, il faut redéfinir un nouveau point coïncident.

4.4. Exemple : mouvement d'une bille sur un tourniquet

- **Activité 6 : Exemple canonique**

5. Transformations de Galilée – Comparaisons avec la relativité

Dans le cas particulier d'une translation rectiligne uniforme de R_2 dans R_1 (TRU, $\vec{v}_{R_2/R_1} = \overrightarrow{V_0} = \overrightarrow{C^{te}}$), les lois de composition s'écrivent :

$$\vec{v}_{M/R_1} = \vec{v}_{M/R_2} + \overrightarrow{V_0}$$
$$\vec{a}_{M/R_1} = \vec{a}_{M/R_2}$$

En choisissant l'axe $\overrightarrow{e_x}$ selon le vecteur $\overrightarrow{V_0}$, ainsi que des origines O_1 et O_2 confondues à l'instant initial, on peut facilement en déduire les ***transformations de Galilée***, exprimant les coordonnées de l'objet dans R_1 en fonction des coordonnées dans R_2 :

$$\begin{cases} x = x' + V_0 t \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

Ce cas particulier est intéressant car si R_1 est galiléen, alors R_2 l'est également. Aussi, les formules de passage d'un référentiel galiléen à un autre apparaissent particulièrement simples en mécanique newtonienne. Cela provient principalement du ***caractère absolu du temps***. En effet, pour établir les lois de composition, on ne s'est jamais préoccupé de l'horloge qui permet de repérer l'écoulement du temps… simplement parce que n'importe laquelle convient ! Nul besoin de préciser dans quel référentiel est fixée l'horloge utilisée.

Comme vu brièvement en TS, ceci n'est plus valable en Relativité Restreinte (la théorie d'Einstein restreinte aux référentiels galiléens). Le temps n'est plus absolu, et il faut définir un temps pour chaque référentiel considéré. Les transformations de Galilée ne sont alors plus valables et doivent être remplacées par les Transformations de Lorentz, où la coordonnée temporelle subit également une transformation lors du changement de référentiel :

$$\begin{cases} x = \gamma(x' + \beta\, ct) \\ y = y' \\ z = z' \\ ct = \gamma(ct' + \beta x') \end{cases}$$

avec c la vitesse de la lumière dans le vide, $\beta = \frac{V_0}{c}$ et $\gamma = \sqrt{\frac{1}{1-\beta^2}}$… Bref, c'est un peu plus compliqué.
On constate d'ailleurs que le temps se transforme partiellement en espace, et inversement l'espace se transforme partiellement en temps. Ce qui est à l'origine des phénomènes (couplés) de dilatation des durées et de contraction des longueurs qui se produisent lors d'un changement de référentiel.

On se doute bien qu'alors la loi de transformation des vitesses est beaucoup moins simple que la loi de composition vue dans ce chapitre : la vitesse relative et la vitesse d'entraînement ne s'additionnent pas.

On notera que la mécanique de Newton n'en est pas pour autant « fausse » comme on peut l'entendre parfois. La preuve : on l'enseigne, et elle est encore très utilisée ! C'est simplement qu'elle reste valable tant que les vitesses impliquées sont faibles devant c. Mathématiquement, la théorie d'Einstein tend d'ailleurs vers celle de Newton lorsque $\beta \ll 1$.

On notera également que le déterminisme de la mécanique newtonienne (tout phénomène mécanique est la conséquence d'une cause qui lui est antérieure) n'est pas remis en cause par la théorie d'Einstein. Mais il l'est par la mécanique quantique, qui introduit l'idée que le hasard fait partie intégrante du monde de l'infiniment petit.

4. Mécanique

Le programme de mécanique de PC s'inscrit dans le prolongement du thème « **Mouvements et interactions** » et de la partie « **Statique des fluides dans un référentiel galiléen** » du thème « **Énergie : conversion et transfert** » du programme de PCSI. Il est constitué de trois parties relevant successivement de la mécanique du point ou des fluides.

Dans la première partie « **Changements de référentiel** », la cinématique des changements de référentiels n'est pas étudiée pour elle-même mais en vue d'applications en dynamique du point ou des fluides.

Notions et contenus	Capacités exigibles
4.1. Changements de référentiel	
Référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à un autre : transformation de Galilée, composition des vitesses.	Relier la transformation de Galilée et la formule de composition des vitesses à la relation de Chasles et au caractère supposé absolu du temps.
Composition des vitesses et des accélérations dans le cas d'un référentiel en translation par rapport à un autre : point coïncident, vitesse d'entraînement, accélération d'entraînement.	Exprimer la vitesse d'entraînement et l'accélération d'entraînement.
Composition des vitesses et des accélérations dans le cas d'un référentiel en rotation uniforme autour d'un axe fixe : point coïncident, vitesse d'entraînement, accélération d'entraînement, accélération de Coriolis.	Exprimer la vitesse d'entraînement et l'accélération d'entraînement. Citer et utiliser l'expression de l'accélération de Coriolis.