Chap.2 – Stabilité des systèmes linéaires (FT et EDiff)

Intro :
Pour le moment, nous n'avons utilisé la notation complexe que pour étudier les circuits linéaires *en régime sinusoïdal permanent*. Nous avons déjà mentionné l'intérêt en physique de l'étude de ce régime particulier, qui permet grâce à l'analyse de Fourier et au principe de superposition d'étudier la réponse d'un circuit linéaire soumis à une excitation quelconque (excitation périodique seulement avec les séries de Fourier).

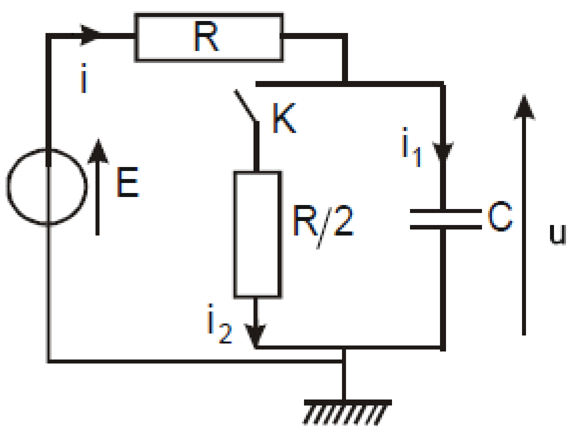
On a introduit la notation complexe pour transformer une équation différentielle en équation algébrique. Nous allons ici présenter tout l'intérêt de l'opération inverse, qui va nous permettre d'établir l'équation différentielle à partir de l'expression de la fonction de transfert. Cela fait de la notation complexe un outil puissant, aussi adaptée à l'étude des circuits *en régime quelconque*.

On définira puis on étudiera la stabilité des circuits linéaires du 1er et 2nd ordre, en utilisant les deux outils mathématiques à notre disposition : l'équation différentielle et la fonction de transfert.

1. Utilisation de la notation complexe en régime variable quelconque

1.1. Equation différentielle réelle $\rightarrow$ Equation algébrique complexe (rappels)

Dans le circuit ci-contre, on suppose que l'excitation $e(t) = E\,cos(\omega t)$ est sinusoïdale. L'interrupteur K est fermé.



- Etablir l'équation différentielle vérifiée par la tension $u(t)$ sans utiliser les complexes
- Donner la forme générale de la solution de cette équation différentielle. Interpréter physiquement les deux termes de la solution.
- Déterminer la fonction de transfert à partir de l'EDiff
- Sans faire les calculs, expliquer comment procéder pour déterminer l'amplitude et la phase à l'origine de $u(t)$

Grâce à la transformation $\left(\dfrac{d}{dt}\right) \rightarrow \times(j\omega)$, la notation complexe est un outil efficace permettant de déterminer l'amplitude et la phase à l'origine de la solution en régime sinusoïdal forcé. ***Elle semble ne fournir aucune information sur le régime transitoire.***

1.2. Equation algébrique complexe $\rightarrow$ Equation différentielle réelle

On considère le même circuit (K est toujours fermé). On « oublie » momentanément les calculs précédents.

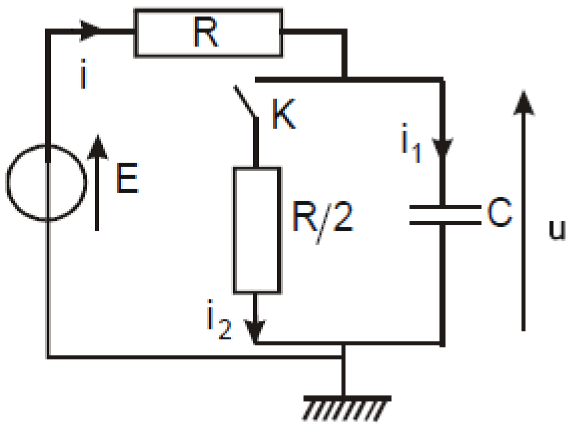
- Déterminer à nouveau la FT, mais sans passer par l'EDiff
- En effectuant la transformation $\times(j\omega)\rightarrow\left(\frac{d}{dt}\right)$, établir l'ED vérifiée par la tension $u(t)$
- Vérifier que le polynôme caractéristique de l'ED linéaire peut être déduit directement du polynôme en $j\omega$ situé au dénominateur de la fonction de transfert.

*Grâce à la transformation $\times(j\omega)\rightarrow\left(\frac{d}{dt}\right)$, la notation complexe permet de retrouver l'équation différentielle vérifiée par la grandeur étudiée. Bien qu'à l'origine, le calcul avec les complexes suppose une étude en régime sinusoïdal forcé, **la forme de l'ED obtenue est sa forme générale, i.e. valable pour une entrée quelconque.** On remarque notamment que le dénominateur de la fonction de transfert permet de retrouver simplement le polynôme caractéristique de l'ESSM, qui détermine le régime transitoire du circuit étudié.*

1.3. La notation complexe pour l'étude générale des circuits linéaires en régime quelconque

- *On savait déjà que la notation complexe permet d'étudier efficacement les circuits linéaires **en régime sinusoïdal forcé**. Elle a été introduite pour cela.*
- *La notation complexe apparaît aussi comme une notation symbolique, un outil purement calculatoire, permettant d'établir les ED nécessaires à l'étude des circuits linéaires en **régime quelconque**. On notera que le dénominateur de la fonction de transfert est directement relié à l'ESSM, donc au régime transitoire du circuit.*

Dans le paragraphe précédent, on a établi la fonction de transfert du montage, sans avoir recours à l'EDiff, mais en utilisant directement la notion d'impédance complexe. On en a déduit ensuite l'EDiff vérifiée par $u(t)$ *en régime quelconque*, i.e. pour une entrée $e(t)$ quelconque.
Afin de réviser l'étude des circuits en régime transitoire, on suppose maintenant que $e(t) = E$ et que l'interrupteur est ouvert depuis très longtemps (le circuit est donc en régime continu). A l'instant $t = 0$, pris pour origine des temps, on ferme l'interrupteur K.



- A l'instant $t = 0^-$ (juste avant la fermeture de l'interrupteur), déterminer i, i_1, i_2 et u en fonction des données de l'énoncé.

- A l'instant $t = 0^+$ (juste après la fermeture de l'interrupteur), déterminer i, i_1, i_2 et u en fonction des données de l'énoncé.

Remarque :
On étudie en général la réponse harmonique et la réponse indicielle des systèmes linéaires. Ces deux études correspondent respectivement aux domaines ***fréquentiel*** et ***temporel***. Ces deux aspects ne sont pas indépendants l'un de l'autre, ceci étant *mathématiquement représenté par la possibilité de passer de la fonction de transfert à l'équation différentielle, et vice-versa.*

Un système linéaire laissant passer les hautes fréquences (aspect fréquentiel) est aussi un système rapide (aspect temporel). Un passe-bas est au contraire un système lent.

- Donner le temps caractéristique d'un RC passe-bas, puis donner sa pulsation de coupure.

2. Critère de stabilité pour les systèmes linéaires du 1^{er} et 2^{nd} ordre

2.1. Définition de la stabilité

Il existe plusieurs définitions de la stabilité. Dans les cas que nous étudierons, elles sont équivalentes.

*Un système linéaire est **stable** si une perturbation déclenche un régime transitoire qui tend vers 0 lorsque le temps tend vers l'infini.*

2.2. Stabilité des systèmes du 1^{er} ordre

- Ecrire l'ESSM d'un système du premier ordre. En déduire le dénominateur de la fonction transfert.
- Donner l'expression générale de la solution de l'ESSM.
- Déterminer les conditions nécessaires pour que le régime transitoire tende vers zéro.

*Un système linéaire du 1^{er} ordre est stable si les coefficients du polynôme au dénominateur de la fonction de transfert **sont de même signe** ; (équivalent à :) si les coefficients de l'EDiff **sont de même signe.***

2.3. Stabilité des systèmes du 2^{nd} ordre

- Ecrire l'ESSM d'un système du 2^{nd} ordre. En déduire le dénominateur de la fonction de transfert.
- Donner l'expression générale des solutions possibles de l'ESSM.
- *(facultatif)* Déterminer les conditions nécessaires pour que le régime transitoire tende vers zéro.

*Un système linéaire du 2^{nd} ordre est stable si les coefficients du polynôme au dénominateur de la fonction de transfert **sont de même signe** ; (équivalent à :) si les coefficients de l'EDiff **sont de même signe.***

Le chapitre suivant traitera des Amplificateurs Linéaires Intégrés, et des montages classiques qu'ils permettent de réaliser. L'étude de la stabilité de ces montages sera une application des résultats du présent chapitre.

Le chapitre sur les oscillateurs permettra d'envisager des situations où les instabilités sont recherchées et exploitées pour réaliser des générateurs de signaux alternatifs à partir de sources d'alimentation continue.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1. Stabilité des systèmes linéaires	
Fonction de transfert d'un système entrée-sortie linéaire continu et invariant.	Transposer la fonction de transfert opérationnelle dans les domaines fréquentiel (fonction de transfert harmonique) ou temporel (relation différentielle).
Stabilité.	Discuter la stabilité d'un système d'ordre 1 ou 2 d'après les signes des coefficients de la relation différentielle ou de la fonction de transfert.

Savoirs :
- La notation complexe peut être aussi vu comme un outil purement calculatoire permettant d'établir l'ED des circuits linéaires en *régime quelconque*
- Critère stabilité : les coefficients du dénominateur de la FT (et de l'EDiff) sont de même signe

Savoirs faire :
- Utiliser la notation complexe pour établir l'ED d'un circuit en régime quelconque
- Déterminer si le système est stable ou instable :
  - par analyse de l'EDiff
  - (ou) par analyse du dénominateur de la FT

Courbes tracées avec Synchronie (L = 10mH, C = 1µF, E = 5V)

Ci-dessous : allures des régimes transitoires d'un système linéaire du second ordre

Circuit RLC série, tension aux bornes de C représentée : régime libre (« décharge »), réponse indicielle (« charge »), pour différentes valeurs du coeff d'amortissement α (paramètre adimensionné écriture canonique)

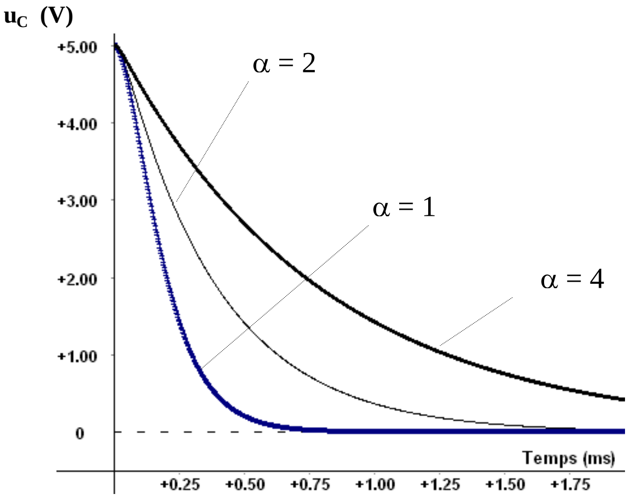


Fig. 1 Décharge : régimes apériodique et critique

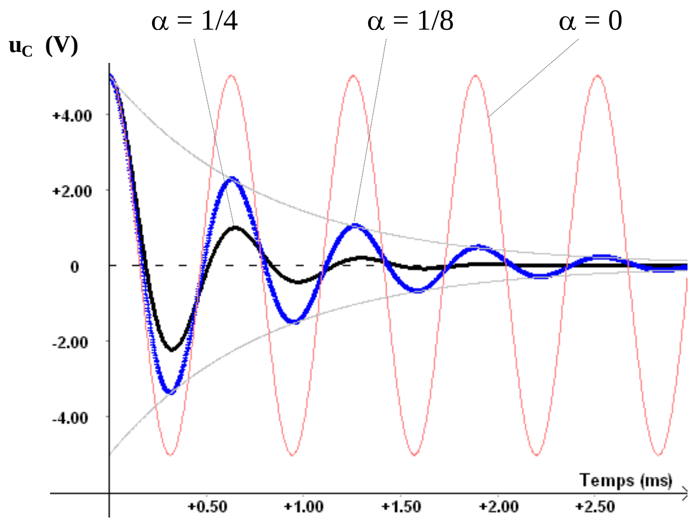


Fig. 2 Décharge : régime pseudo-périodique

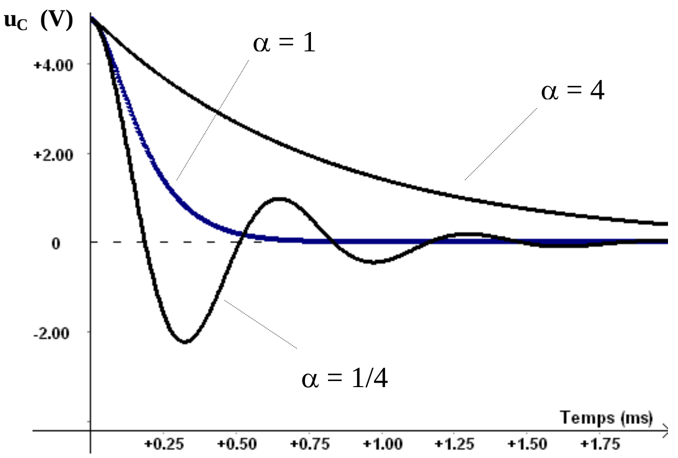


Fig. 3 Décharge : les différents régimes

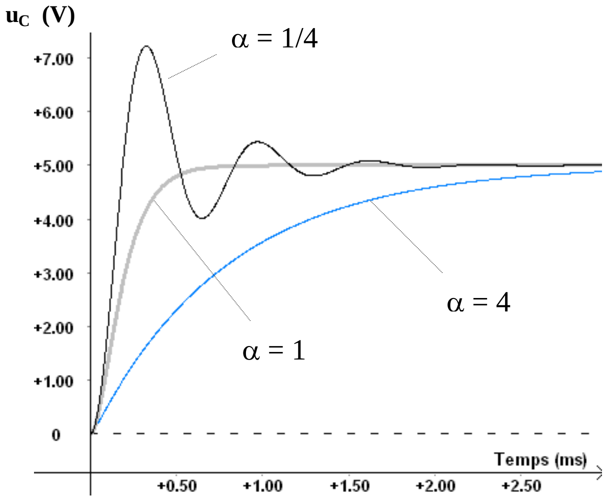


Fig. 4 Charge : les différents régimes