Chap.2 – Dynamique des fluides visqueux – Equations locales

Intro :
Dans ce chapitre, on ne se limite plus à décrire le mouvement du fluide, mais on s'intéresse aux causes du mouvement : les forces. Le système étudié est toujours une particule de fluide (on pense lagrangien), mais on écrit la RFD avec les champs eulériens.

On passe en revue les différentes forces qui peuvent s'exercer au sein d'un fluide réel, et on les exprime par unité de volume. On introduira notamment *une force de frottement interne*, ***la force de viscosité***, à l'origine de l'immobilisation d'un fluide initialement en mouvement, et source de dissipation d'énergie mécanique.

Pour les ***fluides newtoniens***, la RFD écrite en eulérien s'appelle ***l'équation de Navier-Stokes***.

1. Préalable mathématique : laplaciens

1.1. Laplacien d'un champ scalaire

Définition du laplacien d'un champ scalaire

$$\Delta(f) \stackrel{\text{def}}{=} div\left(\overrightarrow{grad}(f)\right) = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}(f)$$
$$\Delta(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Contrairement au gradient, à la divergence et au rotationnel, le *laplacien scalaire* implique les dérivées secondes.

1.2. Laplacien d'un champ vectoriel

Définition du laplacien d'un champ vectoriel

$$\vec{\Delta}(\vec{V}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \Delta(V_x) \\ \Delta(V_y) \\ \Delta(V_z) \end{bmatrix}$$

Le *laplacien vectoriel* donne un champ vectoriel dont chacune des composantes est le laplacien scalaire de la composante de $\vec{V}$ associée. Ce n'est vrai qu'en cartésien (plus compliqué en cylindrique et sphérique).

2. Forces exercées sur une particule de fluide

Soit une particule de fluide (cubique pour faire simple) dans un écoulement unidimensionnel. On fait l'inventaire des forces appliquées, que l'on peut distinguer de plusieurs manières :

- forces agissant à distance dans le volume / force de contact agissant en surface
- pour ces dernières : force normale / force tangentielle

Le système étudié étant un volume élémentaire, on souhaite obtenir une expression locale de la RFD, valable en tout point du fluide. C'est pourquoi on cherche d'abord à exprimer toutes les forces par unité de volume.

2.1. Composante normale des forces de contact – Forces de pression (rappels)

- ❖ En orientant les surfaces vers l'extérieur de la particule de fluide, rappeler la définition de la pression
- ❖ Déterminer l'équivalent volumique de la résultante des forces de pression appliquées à la particule

2.2. Composante tangentielle – Forces de viscosité, contrainte de cisaillement

Soit un écoulement unidimensionnel de champ des vitesses représentant grossièrement l'écoulement d'un fleuve :

$$\vec{v} = v_x(y,t)\overrightarrow{e_x}$$

- ❖ Traduire avec des mots les infos que nous donne l'écriture ci-dessus du champ des vitesses. Traduire cela sur un schéma
- ❖ Qualitativement, dans le cas d'un fleuve, comment le champ des vitesses varie-t-il avec l'altitude ?

L'expérience suggère qu'il existe une force de frottement interne au fluide qui s'écoule : de l'eau mis en mouvement dans un verre s'arrête sans intervention extérieure. Les couches de fluide glissent les unes sur les autres, et elles frottent les unes contre les autres (cf. les vidéos projetées en classe). Cela ressemble aux frottements solides de glissement vus en PCSI, sauf qu'ici les frottements dépendent de la différence de vitesse entre les couches de fluide jointives (ils sont notamment nuls en statique, contrairement aux frottements solide).

Cette force s'exerce tangentiellement à la surface de contact. C'est la ***force de cisaillement*** ou ***force de viscosité***.

Définition de la contrainte de cisaillement $\vec{\boldsymbol{\sigma}}$

La contrainte de cisaillement est la force par unité de surface $(N.m^{-2})$:

$$\overrightarrow{dF_{cis}} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{\boldsymbol{\sigma}}\, dS$$

Comprendre cette formule signifie d'être capable de faire un schéma, d'y représenter le système, la force de cisaillement qu'il subit, et d'identifier le fluide extérieur qui exerce cette force.

En mécanique, le mot ***contrainte*** signifie *force par unité de surface*.

- ❖ Comment pourrait-on nommer la pression ?

Expression de la contrainte de cisaillement pour un fluide newtonien

Dans le cas d'un ***fluide newtonien*** de champ des vitesses $\vec{v} = v_x(y,t)\overrightarrow{e_x}$:

$$\boldsymbol{\vec{\sigma} = \pm\eta \frac{\partial v_x}{\partial y}\overrightarrow{e_x}}$$

$\boldsymbol{\eta} > 0$ est la ***viscosité dynamique*** (en $Pa.s$, ou Poiseuille $P\ell$)

Le signe dépend de la couche de fluide choisie comme système, et de la position de la couche extérieure qui exerce cette force (au-dessus du système ? en-dessous ?).

Comprendre cette formule signifie d'être capable de faire un schéma, d'y représenter le système, la force de cisaillement qu'il subit, et d'identifier le fluide extérieur qui exerce cette force.

Ordre de grandeur de la viscosité dynamique :

- eau $\eta = 10^{-3} Pl$
- air 1 bar $\eta = 2\ 10^{-5} Pl$
- lubrifiant moteurs $\eta \approx 0{,}1\ Pl$

2.3. Equivalent volumique des forces appliquées en surface

Equivalent volumique de la force de viscosité *(généralisation)*

Pour un ***fluide newtonien*** en ***écoulement incompressible***, la force volumique de viscosité $(N.m^{-3})$ s'écrit :

$$\boldsymbol{\vec{f}_{visc} = \eta\, \vec{\Delta}(\vec{v})}$$

- ❖ Etablir l'expression de l'équivalent volumique de la résultante des forces de cisaillement, dans le cas du champ des vitesses donné plus haut
- ❖ Développer l'écriture du laplacien vectoriel en coordonnées cartésiennes. Conclure.

2.4. Conditions aux limites

Même en l'absence de viscosité, un fluide en contact avec une paroi vérifie la condition de non-pénétration :

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$$

où $\vec{n}$ est le vecteur normal à la paroi. Cela implique aussi la condition de non-décollement, généralement vérifiée.

Dans le cas d'un fluide visqueux, la force de viscosité s'exprime en fonction de dérivées spatiales, et ne peut être infinie. Cela implique que la vitesse doit varier continûment dans un fluide :

- ***la vitesse du fluide est nulle le long d'une paroi immobile*** : le fluide « colle » à la paroi
- ***la contrainte de cisaillement est nulle à la surface libre d'un liquide*** : viscosité due à l'air ~ nulle

On rappelle qu'en l'absence de tension superficielle, la pression est continue à la traversée d'une interface entre deux fluides non miscibles.

On considère un avion volant dans le ciel. En l'absence d'avion, l'air est supposé immobile dans le référentiel terrestre. En présence de l'avion, on note que l'air en amont de l'avion reste immobile. Dans les autres directions (en aval de l'avion, et transversalement à l'avion), l'air n'est pas mis en mouvement par l'avion et reste (ou redevient) immobile. On généralise en affirmant donc qu'un ***écoulement de fluide loin d'un objet n'est pas perturbé par la présence de l'objet***.

Les deux conditions aux limites les plus classiques

*La **vitesse** du fluide est **nulle** le long d'une **paroi immobile*** : le fluide « colle » à la paroi
*La **contrainte de cisaillement** est **nulle à la surface libre d'un liquide*** : viscosité due à l'air ~ nulle

2.5. Origine microscopique de la viscosité : diffusion de quantité de mouvement

Dans la vidéo montrant un fluide vert venant à la rencontre d'un fluide rose, il apparaît clairement que le second « acquiert du mouvement » (de la *quantité de mouvement* pour utiliser un vocabulaire scientifique précis) grâce au premier qui vient à sa rencontre. Il y a transfert de quantité de mouvement entre le fluide vert et le fluide rose, et ce transfert est visible à l'échelle macroscopique : c'est un transfert assimilable à un *choc*. On qualifie ce transfert de quantité de mouvement de ***convectif*** car ce transfert est associé au ***mouvement macroscopique*** du fluide vert. Le transfert se fait dans le sens de son mouvement macroscopique (d'où l'idée intuitive de « choc »).

Dans la vidéo montrant un fluide blanc pâteux mis en mouvement par le mouvement de la paroi inférieure le délimitant, on ne voit pas de corps macroscopique (un autre fluide ou un solide) transmettre une part de son mouvement au fluide. « Du mouvement » (de la quantité de mouvement pour faire référence à une grandeur physique précise) a été transmis orthogonalement au mouvement macroscopique des corps en présence. On ne voit pas de « choc » qui serait à l'origine de l'écoulement du fluide blanc. Conclusion : ce transfert de quantité de mouvement *invisible à l'échelle macroscopique* a lieu à l'échelle ***microscopique***. C'est un transfert ***diffusif*** de quantité de mouvement.

*Les **forces de viscosité** correspondent à un **transport diffusif de quantité de mouvement** dans le fluide.*
*« Diffusif » signifie que le transfert du mouvement se fait **à l'échelle microscopique**.*

3. Dynamique locale – Equation de Navier-Stokes

3.1. Equation de Navier-Stokes : RFD sur une particule de fluide

C'est simplement la RFD (ou plutôt le TQM) appliquée à une particule de fluide, mais écrite en eulérien, et par unité de volume. On pense lagrangien mais on écrit eulérien.

Equation de Navier-Stokes

*Pour un fluide **newtonien** en **écoulement incompressible*** :

$$\boldsymbol{\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho\vec{g} - \overrightarrow{grad}P + \eta\,\vec{\Delta}(\vec{v}) + \vec{f}_{autres}}$$

$\vec{f}_{autres}$ représente les forces volumiques autres que le poids, la résultante des forces de pression et la résultante des forces de viscosité. On peut penser aux forces électriques et magnétiques si le fluide est chargé, aux pseudo-forces d'inertie si le référentiel n'est pas galiléen.

L'équation de NS est à connaître par cœur, puisque chaque terme est connu et doit être connu par cœur. On remarque qu'elle « contient » la relation fondamentale de la statique des fluides… ce qui était attendu !

3.2. Nb de Reynolds – Intensités comparées des deux modes de transfert de quantité de mouvement

Il y a deux processus qui permettent de transférer du mouvement d'une partie du fluide à une autre.

Le processus convectif, associé au déplacement ***macroscopique*** de fluide. Dans l'équation de Navier-Stokes, le terme représentant le déplacement de la particule de fluide dans l'espace est l'accélération convective :

$$(\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad})\vec{v}$$

Le processus diffusif, associé au transfert ***microscopique*** de quantité de mouvement. C'est le terme de viscosité :

$$\eta\,\vec{\Delta}(\vec{v})$$

En mécanique des fluides, on définit un nombre adimensionné qui permet de comparer les intensités de ces deux modes de transfert, c'est *le nombre de Reynolds*.

<u>Définition intuitive du nombre de Reynolds</u>

$$R_e \overset{\text{def}}{=} \frac{Intensite\ du\ transfert\ \boldsymbol{convectif}\ de\ quantité\ de\ mouvement}{Intensite\ du\ transfert\ \boldsymbol{diffusif}\ de\ quantité\ de\ mouvement}$$

Lorsque l'on étudie l'écoulement d'un fluide particulier, il est souvent possible d'évaluer l'ordre de grandeur :

- de la ***vitesse caractérstique V*** de l'écoulement
- de la ***longueur caractéristique L*** sur laquelle varie significativement la vitesse du fluide

On peut alors exprimer R_e en fonction de ces deux paramètres, de la viscosité dynamique et de la masse volumique du fluide.

<u>Raisonnement « par ordre de grandeur » (ou « par analyse dimensionnelle »)</u>

La méthode consiste à remplacer des ***champs*** *ainsi que des* ***opérateurs différentiels***
par des ***grandeurs caractéristiques*** *de même dimension* :

$$\frac{\partial}{\partial x} \to \frac{1}{L}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \to \frac{1}{T}$$

$$\vec{v} \to V$$

<u>Expression du nombre de Reynolds</u>

$$R_e = \frac{\rho V L}{\eta}$$

- ❖ Démontrer l'expression ci-dessus R_e via un raisonnement par ordre de grandeur
- ❖ Dans l'exemple d'un avion qui vole (air s'écoule autour), comment trouver les ordres de grandeur ci-dessus ?
- ❖ Pour une voiture ? pour un ballon de football ?
- ❖ Dans le cas de l'eau qui s'écoule dans une conduite (alimentation d'eau à la maison) ?
- ❖ Dans le cas d'un doigt glissé dans un pot de glycérine ?
- ❖ Une solution aqueuse dans l'aiguille d'une seringue lors de l'injection d'un vaccin ?

<u>Quelques ordres de grandeur du nombre de Reynolds :</u>

Manteau terrestre	10^{-20}
Glacier	10^{-11}
Spermatozoïdes dans le liquide séminal	10^{-3}
Bille dans du miel	10^{-2}
Têtard	100
Homme dans l'eau	10^{5}
Requin dans l'eau	10^{8}

3.3. Utilité du nombre de Reynolds – Similitudes entre différents écoulements

L'utilisation d'un ***nombre adimensionné*** permet de décrire de ***manière identique*** des écoulements différents mais appartenant à une ***même classe d'écoulements***. Dans le cas du nombre de Reynolds, on verra qu'il rend possible la prédiction du régime d'écoulement (laminaire ou turbulent, cf. prochaine chapitre) d'un fluide autour d'un objet (ou à l'intérieur d'une conduite), et ce quelles que soient la nature du fluide, sa vitesse, et dans une moindre mesure la forme de l'objet.

Il existe d'autres nombres adimensionnés en mécanique des fluides. Sur la page Wikipédia « Nombre adimensionnel en mécanique des fluides », environ 80 d'entre eux sont répertoriés.

L'existence de tels nombres est cruciale pour l'ingénieur, car elle légitime la construction de ***maquettes à échelle réduite*** avant de produire un prototype à échelle réelle, particulièrement coûteux en général (étude aérodynamique des avions, des voitures, sillage d'un bateau, écoulement d'avalanches). Il peut effectuer des mesures sur maquette et en déduire des prédictions à l'échelle réelle. Il est aussi possible d'étudier l'écoulement d'un fluide facile à manipuler (air, eau) puis transposer le résultat à un liquide plus cher ou moins pratique à manipuler.

4. Etude de quelques écoulements classiques

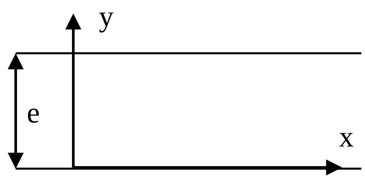
4.1. Trois grandes façons de faire couler un fluide

Un *écoulement de Couette* est un écoulement de fluide visqueux dans une conduite dont les parois se meuvent à des vitesses constantes mais différentes. ***Le fluide est mis en mouvement par le mouvement des parois***, le gradient de pression étant nul dans la direction de l'écoulement.

Un *écoulement de Poiseuille* est un écoulement de fluide visqueux dans une conduite dont les parois sont immobiles. ***Le fluide est mis en mouvement par le gradient de pression entre l'entrée et la sortie de la conduite*** (ça pousse plus à l'entrée qu'à la sortie). C'est le phénomène analogue à l'écoulement de charge électrique dans un conducteur ohmique soumis à une différence de potentiel constante.

Le plus facile à observer, *l'écoulement gravitaire* est un ***écoulement de fluide provoqué par la pesanteur*** (exemple d'un fluide coulant sur un plan incliné).

4.2. Ecoulement de Couette plan



Cet écoulement peut être vu comme une modélisation simplifiée de la mise en mouvement de l'eau située entre la coque d'un bateau et le fond du rivage, en eau peu profonde.

L'espace est rapporté à un trièdre Oxyz, Oy étant dirigé suivant la verticale ascendante. Un fluide newtonien en écoulement incompressible et homogène (et laminaire, cf. plus tard), de viscosité dynamique η est enfermé entre deux plaques planes infinies, parallèles, perpendiculaires à Oy et d'altitudes respectives y = 0 et y = e. La plaque d'altitude y = 0 est immobile, l'autre étant animée d'une vitesse constante $\overrightarrow{V_0} = V_0\,\overrightarrow{u_x}$. On se place en régime stationnaire. Il n'y a pas de différence de pression entre l'amont et l'aval de l'écoulement. La pression en $y = e$ est P_0. On suppose que l'écoulement est unidirectionnel.

- ❖ Expliquer pourquoi on peut choisir de ne pas faire dépendre le champ des vitesses de la coordonnée z
- ❖ Donner une écriture mathématique du champ des vitesses regroupant toutes les informations connues sur lui
- ❖ L'écoulement étant incompressible, montrer que le champ des vitesse ne dépend pas de x
- ❖ Montrer que le champ d'accélération est nul en tout point

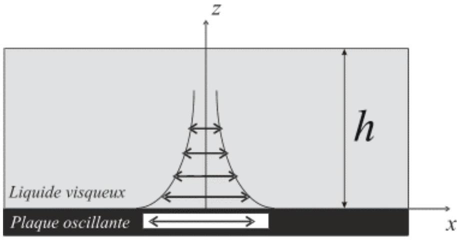
- ❖ Appliquer le principe fondamental de la dynamique à une particule de fluide, et le projeter :
  - Montrer que l'évolution de la pression est la même qu'en statique
  - Etablir alors l'expression du champ des vitesses
- ❖ Quelle est la force par unité de surface subie par chacune des plaques ?

4.3. Ecoulement de Poiseuille plan

La situation étudiée ainsi que les hypothèses faites sur l'écoulement sont les mêmes que précédemment, sauf que :
- les deux parois sont ici immobiles, la pression en $y = e$ est inconnue
- un dispositif impose une différence de pression $\Delta P \stackrel{\text{def}}{=} P(x = L, y) - P(x = 0, y)$ sur une longueur L de tuyau, elle est la même pour toute valeur de y

Cela modélise de manière simplifiée l'écoulement d'un fluide dans une conduite parallélépipédique, beaucoup plus large (selon z) qu'épaisse (selon y).

❖ L'écoulement se fait de gauche à droite. Qualitativement, de quel côté la pression est-elle la plus élevée ?
❖ Expliquer pourquoi il est raisonnable d'affirmer que les champs sont tous indépendants de z
❖ Montrer que le champ des vitesses ne dépend que de y
❖ A partir de Navier-Stokes, montrer que $\frac{\partial P}{\partial x}$ est indépendant de x. Quelle est sa valeur ?
❖ Déterminer le champ des vitesses
❖ En déduire le débit massique de fluide par unité de largeur
❖ Quelle est la force par unité de surface subie par chacune des plaques ?



4.4. Couette plan non-stationnaire – Viscosité cinématique

On revient à l'exemple de l'écoulement de Couette, mais cette fois on ne fait pas l'hypothèse stationnaire. On peut par exemple supposer que la plaque inférieure est animée d'une vibration longitudinale sinusoïdale, et qu'il n'y pas de plaque supérieure (exemple traité en TD).
On considère un liquide suffisamment visqueux pour que l'écoulement soit laminaire.
Les hypothèses qui suivent sont aisément vérifiées : fluide <u>newtonien</u> en écoulement <u>incompressible</u> et <u>homogène</u> de viscosité dynamique η, écoulement <u>unidirectionnel</u>, plaque plane <u>infinie</u>.
Il n'y a pas de différence de pression entre l'amont et l'aval de l'écoulement. On a alors :

$$\vec{v}(M) = v(y,t)\vec{u}_x$$

En projetant Navier-Stokes selon $\vec{u}_x$, on établit alors l'expression suivante :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\eta}{\rho}\Delta v$$

On reconnaît l'équation de diffusion. Il suffit de multiplier par ρ puis $\vec{u}_x$, et l'on constante deux choses :
- la quantité qui diffuse est une quantité de mouvement volumique
- le coefficient de diffusion dépend de la viscosité dynamique et de la masse volumique

<u>Définition de la viscosité cinématique</u>

ν se dit « nu » grec (ne pas confondre avec la vitesse v, les typos se ressemblent beaucoup)

$$\nu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\eta}{\rho}$$

*La **viscosité cinématique** s'interprète comme le **coefficient de diffusion de quantité de mouvement** dans le fluide.*

<u>*(Culturel)* Autre façon d'établir l'expression du nombre de Reynolds :</u>
On se place dans le cas d'un écoulement d'un fluide newtonien incompressible dans une conduite de diamètre D et de longueur L.

✪ En se basant sur la définition qualitative du nombre de Reynolds, proposer une définition mathématique du nombre de Reynolds à partir :
  - de la durée τ_{diff} caractérisant l'intensité du transport diffusif de quantité de mouvement (celui-ci s'opérant radialement, préciser au préalable la longueur caractéristique pertinente)
  - de la durée τ_{conv} caractérisant l'intensité du transport convectif de quantité de mouvement sur une même distance (même si le transport se fait ici selon l'axe de la conduite)

✪ Retrouver alors l'expression du nombre de Reynolds en fonction de ρ, U et D

Notions et contenus	Capacités exigibles
2.2 Actions de contact dans un fluide en mouvement	
Forces de pression. Équivalent volumique.	Utiliser les relations d$\mathbf{F}$ = -pd$\mathbf{S}$ et d$\mathbf{F}$ = -$\mathbf{grad}$p dτ
Contraintes tangentielles dans un écoulement $\mathbf{v} = v_x(y)\ \mathbf{u}_x$ au sein d'un fluide newtonien ; viscosité. Équivalent volumique des forces de viscosité dans un écoulement incompressible.	Utiliser l'expression fournie $d\mathbf{F}=\eta\partial v_x/\partial y\ dS\mathbf{u}_x$ Établir sur cet exemple l'expression d$\mathbf{F}$ = η $\mathbf{\Delta v}$ dτ. Utiliser sa généralisation admise pour un écoulement incompressible quelconque.

Notions et contenus	Capacités exigibles
2.3 Équations dynamiques locales	
Équation de Navier-Stokes dans un fluide newtonien en écoulement incompressible. Terme convectif. Terme diffusif. Nombre de Reynolds dans le cas d'une unique échelle spatiale.	Utiliser cette équation. Évaluer en ordre de grandeur le rapport du terme convectif sur le terme diffusif et le relier au nombre de Reynolds dans le cas d'une unique échelle spatiale.

Vidéos DVD mécaflu + Manip :

- *Ecoulement de Couette : force de cisaillement + transfert diffusif de quantité de mouvement*
- *Ecoulements complexes : la plupart des écoulements réels ne peuvent pas être traités analytiquement*
- *Pâte REDUX + mélange eau-Maïzena : exemples fluides non-newtonien*