Chap.4 – Circuit RLC série en régime sinusoïdal forcé

Intro :
On étudie dans ce chapitre la réponse d'un circuit RLC série soumis à une excitation sinusoïdale en entrée. On étudiera plus particulièrement la réponse du circuit *en régime permanent*. On parle aussi de *régime sinusoïdal forcé*.

On a vu dans les chapitres précédents que le circuit RLC peut être assimilé à un oscillateur électrique. Lors de l'étude du circuit soumis à un échelon de tension, on a vu que les grandeurs électriques (tensions et courant) du circuit peuvent osciller si l'amortissement est suffisamment faible.

Dans la présente étude du régime sinusoïdal forcé, on va mettre en évidence un phénomène de résonance. On montrera, comme vous le savez intuitivement, que si l'on excite l'oscillateur avec une fréquence proche de « sa fréquence propre » alors l'amplitude des oscillations peut devenir très grande.

Ce chapitre est aussi l'occasion d'introduire pour la première fois la *notation complexe*. Cette nouvelle représentation mathématique des grandeurs sinusoïdale nous sera très utile ; elle permet de ramener la résolution d'équation différentielle à second membre variable (compliquée !) à la résolution d'une équation algébrique complexe (simple !).

Enfin, dans ce chapitre les grandeurs électriques étant fonction du temps, cette étude n'est valable que dans le cadre de l'ARQS.

1. **Signaux sinusoïdaux** (rappels de TP)

1.1. Caractéristiques d'un signal sinusoïdal

Le contenu de ce paragraphe n'est pas restreint à l'électrocinétique ; il peut être adapté à tout type de phénomène physique, dès lors que l'on s'intéresse à une grandeur variant sinusoïdalement avec le temps. Par la suite, le terme « signal » peut être considéré comme un synonyme de « grandeur physique ». En électrocinétique, cela peut être une tension, une intensité, une puissance, une charge etc. En mécanique, cela pourra être une position, une vitesse, une force, une énergie etc.

La forme mathématique d'un signal sinusoïdal peut-être donnée par l'expression :

$$A\cos(\omega t+\varphi)$$

- A est ***l'amplitude*** du signal
- ω est sa ***pulsation***
- le terme $\Phi(t) \stackrel{\text{def}}{=} (\omega t+\varphi)$ est appelé la ***phase*** du signal
- φ est la ***phase à l'origine***, i.e. $\Phi(t=0)=\varphi$

Ces trois paramètres suffisent pour caractériser complètement un signal sinusoïdal. On définit aussi :

- la *période* $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$ (savoir établir cette expression)
- la *fréquence* définie comme l'inverse de la période

1.2. Déphasage entre deux signaux synchrones

Deux signaux sinusoïdaux sont dits *synchrones* lorsqu'ils sont de même fréquence (de même pulsation).
On considère deux signaux sinusoïdaux synchrones :

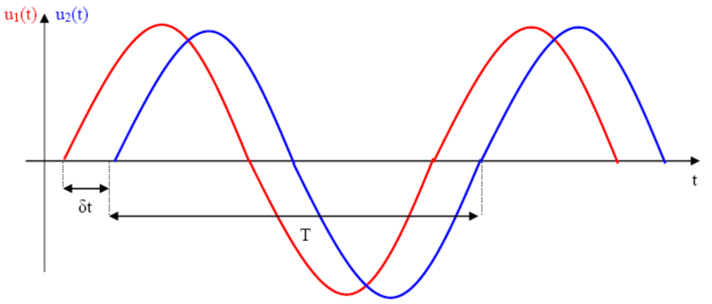
$$\begin{cases} u_1(t)=a\cos(\omega t+\varphi_1) \\ u_2(t)=b\cos(\omega t+\varphi_2) \end{cases}$$

On définit le déphasage $\boldsymbol{\Delta\varphi}$ *par la différence entre les phases des deux signaux :*

$$\Delta\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \phi_2(t)-\phi_1(t)=\varphi_2-\varphi_1$$

Le déphasage est une grandeur algébrique, il peut être positif ou négatif. Le déphasage est défini à 2π près. On choisit généralement de se restreindre à l'intervalle $]-\pi,\pi]$.

La figure ci-dessus représente l'évolution temporelle des deux signaux. On voit que les deux signaux sont décalés en temps. Il suffit de translater la courbe rouge (u_1) vers la droite pour qu'elle se superpose à la courbe bleue (u_2). On notera qu'en plus d'être de même fréquence, les deux signaux ont ici la même amplitude. C'est un cas particulier. **On appelle *décalage temporel* la durée $\boldsymbol{\Delta t \stackrel{\text{def}}{=} t_2-t_1}$ représentée sur la figure.**



Méthode de mesure du déphasage à l'oscilloscope

On mesure le décalage temporel Δt, puis on en déduit la valeur absolue du déphasage par :

$$\frac{|\Delta\varphi|}{2\pi}=\frac{|\Delta t|}{T}$$

Ensuite on détermine le signe du déphasage en regardant quelle courbe est en avance sur l'autre :

- si u_2 est la courbe la plus à gauche (« en avance »), alors le déphasage est positif
- si u_2 est la courbe la plus à droite (« en retard »), alors le déphasage est négatif.

2. Le régime permanent est sinusoïdal

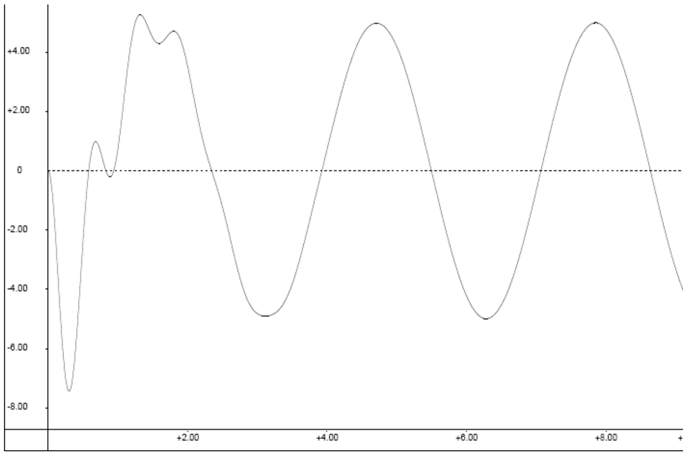
On considère ici le circuit RLC série soumis en entrée à un signal sinusoïdal de pulsation fixée :

$$e(t) = E_0 \cos(\omega t + \varphi_e)$$

Ce signal d'entrée est une *excitation* qui va provoquer une variation des grandeurs électriques du circuit. On souhaite établir l'évolution temporelle de ces différentes grandeurs. Il est clair qu'une fois la tension aux bornes de C déterminée, toutes les autres grandeurs peuvent alors être déduites. On cherche donc par la suite $u_C(t)$.

2.1. Les deux termes de la solution : régime transitoire et régime permanent

- Etablir l'équation différentielle vérifiée par $u_C(t)$
- Quelle est la forme de la solution ?
- En analysant la courbe simulée donnant $u_c(t)$, repérer la contribution de chacun des termes de la solution.



2.2. Définition et propriétés du régime sinusoïdal forcé

- La solution de l'équation sans second membre représente ***le régime transitoire*** :
  - il s'atténue rapidement
  - il dépend des conditions initiales (qui fixent les constantes d'intégration)
- La solution particulière représente ***le régime permanent*** :
  - il est ***sinusoïdal, de même pulsation*** *que l'excitation* (on parle de *régime sinusoïdal forcé*)
  - il est *indépendant des conditions initiales* (pas de constantes d'intégration)

Ces résultats sont valables pour toutes les grandeurs électriques du circuit.

*Par la suite, **on ne s'intéressera plus qu'au régime permanent***, sans se préoccuper du régime transitoire.

3. Introduction de la notation complexe

*On introduit ici la notation complexe pour **déterminer de façon simple la solution en régime permanent**.* Dans le circuit RLC série, en régime sinusoïdal forcé, on vient de montrer que la tension aux bornes de C est sinusoïdale :

$$u_C(t) = U_C \cos(\omega t + \varphi_C)$$

Ainsi déterminer la solution en régime sinusoïdal forcé revient simplement à trouver :
- **l'amplitude U_C**
- **la phase à l'origine φ_C**

3.1. Définition de la notation complexe

On définit deux grandeurs complexes :

- *la tension complexe* $\underline{u_C}(t)$, qui dépend du temps
- *l'amplitude complexe* $\underline{U_C}$, qui ne dépend pas du temps

$$\underline{u_c}(t) \stackrel{\text{def}}{=} U_c e^{j(\omega t+\varphi_c)}$$
$$\underline{U_c} \stackrel{\text{def}}{=} U_c e^{j\varphi_c}$$

Remarque :
Par définition, la partie réelle de la tension complexe est la tension $u_C(t)$ recherchée.
Mais attention, on n'utilisera jamais cette propriété pour établir son expression. Il y a beaucoup plus simple :

- ***le module** de l'amplitude complexe donne l'amplitude du signal réel* :
- ***l'argument** de l'amplitude complexe donne la phase à l'origine du signal réel :*

Méthode pour déterminer l'amplitude réelle et la phase à l'origine

$$\left|\underline{U_C}\right| = U_C$$
$$\arg\left(\underline{U_C}\right) = \varphi_C$$

3.2. Dérivation et intégration de la tension complexe par rapport au temps

Dériver la tension complexe revient à la **multiplier par *jω***
« ***Primitiver*** » la tension complexe revient à la **diviser par *jω***

Lors de l'opération d'intégration, *on ne fera jamais apparaître de constante d'intégration.*
Comprenez-vous pourquoi ?

On vient de définir la notation complexe sur l'exemple de la tension aux bornes de C dans le circuit RLC série en régime sinusoïdal forcé. ***Cette définition se généralise à tout grandeur électrique sinusoïdale.***

3.3. La tension complexe vérifie la même équation différentielle que la tension réelle

Il suffit en effet de « rajouter une barre » dans l'EDiff de départ (cf. 2.1). Cela se prouve en démontrant que la partie imaginaire vérifie aussi l'EDiff (évident pour la partie réelle).

4. Détermination du régime forcé en notation complexe

Une fois la notation complexe introduite, l'objectif est maintenant de déterminer l'amplitude complexe qui contient toute l'information utile sur la tension réelle (amplitude et phase à l'origine).

4.1. Amplitude complexe de la tension aux bornes de C

- En utilisant la notation complexe pour $u_C(t)$ et $e(t)$, transformer l'équation différentielle établie précédemment en une équation algébrique vérifiée par $\underline{U_C}$. En déduire l'expression de $\underline{U_C}$.
- Exprimer l'amplitude complexe de la tension en fonction des variables réduites Q et $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$

On notera l'extrême simplicité de cette méthode de résolution. C'est tout l'avantage de la notation complexe.

4.2. Amplitude complexe du courant dans le circuit

- Etablir l'équation différentielle vérifiée par le courant $i(t)$ circulant dans le circuit RLC série.

- En déduire l'expression de l'amplitude complexe du courant $\underline{I}$. Exprimer $\underline{I}$ en fonction de Q et x.

5. Analyse de la solution $I(\omega)$: résonance en intensité

Il apparaît clairement que l'amplitude complexe dépend des paramètres intrinsèques au circuit (R, L et C) ainsi que de la fréquence (de la pulsation ω) de l'excitation. Les caractéristiques du circuit (R, L et C) étant fixées, *on souhaite déterminer la dépendance de la réponse du circuit avec la pulsation de l'excitation.*

Méthode

Il s'agit simplement d'étudier les fonctions $I(\omega)$ et $\Delta\varphi(\omega)$:

- Etude asymptotique sur $\underline{I}(\omega)$, pour en déduire celles sur $I(\omega)$ et $\Delta\varphi(\omega)$.
- Etude des variations de $I(\omega)$ et $\Delta\varphi(\omega)$.
- Si $I(\omega)$ admet un maximum, on parle de *phénomène de résonance*.

5.1. Etude asymptotique de l'amplitude complexe

- Donner l'équivalent de l'amplitude complexe à basse fréquence, et à haute fréquence

5.2. Etude de l'amplitude (réelle) en fonction de la pulsation

- Donner les valeurs asymptotiques de l'amplitude réelle
- Exprimer l'amplitude (réelle) en fonction de la pulsation
- Etudier les variations de l'amplitude en fonction de la pulsation

Deux courbes à la fin du polycopié représentent l'évolution de l'amplitude avec la pulsation, et la largeur de la résonance avec le facteur de qualité.

On retiendra les résultats suivants :

- *Quelque soient les paramètres du circuit, il y a* ***toujours résonance en intensité***
- *La pulsation de résonance est* ***égale à la pulsation propre***
- *L'amplitude à la résonance est d'autant* ***plus grande que R est faible***
- *La résonance est d'autant* ***plus aiguë que le facteur de qualité est grand****. Plus l'oscillateur RLC est* ***amorti, plus la résonance est « floue »***

5.3. Etude du déphasage en fonction de la pulsation

- Donner les valeurs asymptotiques du déphasage entre le courant et l'excitation
- Exprimer le déphasage en fonction de la pulsation

La courbe représentant l'évolution du déphasage avec la pulsation se trouve à la fin du polycopié.

On retiendra les résultats suivants :

- *Le déphasage varie de* ***Pi/2 à -Pi/2*** *quand la fréquence augmente*
- *L'évolution du déphasage se fait* ***d'autant plus brusquement que l'amortissement est faible*** *(Q grand)*
- *Le déphasage est nul à la résonance*

6. Analyse de la solution $U_C(\omega)$: résonance en tension

6.1. Etude asymptotique de l'amplitude complexe

- Donner l'équivalent de l'amplitude complexe à basse fréquence, et à haute fréquence

6.2. Etude de l'amplitude (réelle) en fonction de la pulsation

- Donner les valeurs asymptotiques de l'amplitude réelle
- Exprimer l'amplitude en fonction de la pulsation
- Etudier les variations de l'amplitude en fonction de la pulsation
- Lorsqu'il y a résonance en tension, on parle parfois de *facteur de surtension*, défini comme le rapport entre $U_C(\omega_0)$ et E_0 (amplitude de l'excitation). Montrer que ce facteur est égal à Q.

La courbe à la fin du polycopié représente l'évolution de l'amplitude avec la pulsation.

On retiendra les résultats suivants :

- *Si l'amortissement est trop grand, il n'y a pas résonance : il* ***n'y a pas toujours*** *résonance en tension*
- ***Condition de résonance :*** $Q > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$
- *La pulsation de résonance est* ***toujours inférieure à la pulsation propre****. Plus l'amortissement est faible, plus elle s'en approche*
- *Quand elle existe, l'amplitude à la résonance est d'autant* ***plus grande que l'amortissement est faible*** *(c.f. facteur de surtension)*
- *Quand elle existe, la résonance est d'autant* ***plus aiguë que le facteur de qualité est grand***

6.3. Etude du déphasage en fonction de la pulsation

- Donner les valeurs asymptotiques du déphasage entre la tension $u_c(t)$ et l'excitation
- Exprimer le déphasage en fonction de la pulsation

La courbe représentant l'évolution du déphasage avec la pulsation se trouve à la fin du polycopié.

On retiendra les résultats suivants :

- *Le déphasage varie de* ***0 à -Pi*** *quand la fréquence augmente*
- *L'évolution du déphasage en tension est* ***strictement identique*** *à celle du déphasage en courant, la courbe est* ***simplement translatée verticalement de -Pi/2***

Notions clefs

<u>Savoirs</u> :

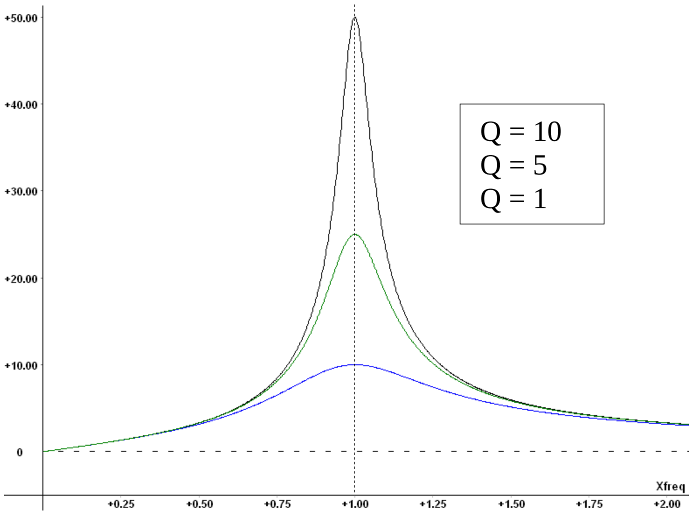
- Caractéristiques d'un signal sinusoïdal ; déphasage entre deux signaux synchrones
- Solution ESSM = régime transitoire ; solution particulière = régime permanent sinusoïdal forcé
- Définition et intérêt des grandeurs complexes
- Module de l'amplitude complexe donne l'amplitude (réelle), l'argument donne la phase
- Résultats *qualitatifs* concernant les résonances en intensité et en tension
- Critère de résonance en tension (*NE PAS CONFONDRE avec le critère apériodique / pseudo-périodique*)

<u>Savoirs faire</u> :

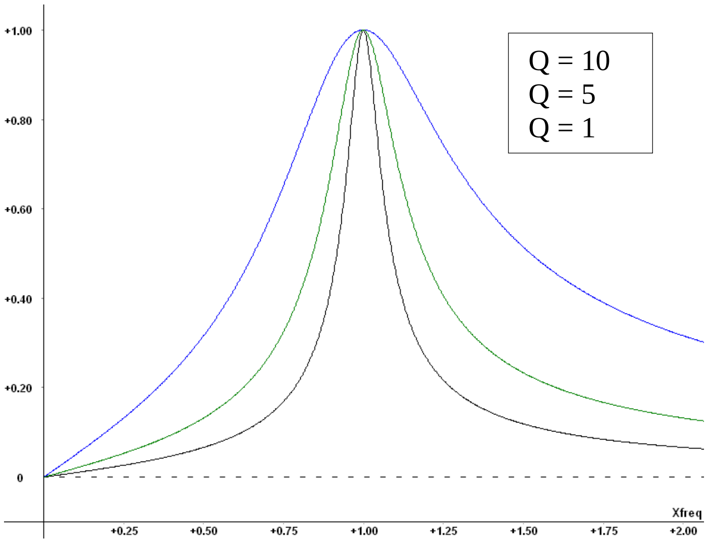
- Etablir l'expression d'une amplitude complexe à partir de l'équation différentielle
- La forme canonique étant donnée, exprimer les variables réduites en fonction de R, L et C
- Méthode d'analyse des résultats
  - étude asymptotique *sur l'amplitude complexe directement*
  - puis en déduire les valeurs asymptotiques sur l'amplitude (réelle) et le déphasage
  - connaître l'allure des courbes de l'amplitude réelle et du déphasage (en tension, en courant)

Courbes tracées avec Synchronie (L = 10mH, C = 10 nF, E_0 = 5V)

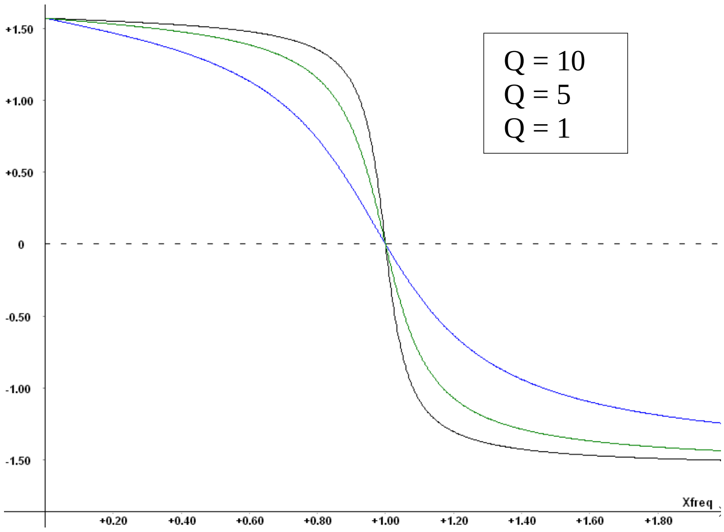
I_0 (mA)



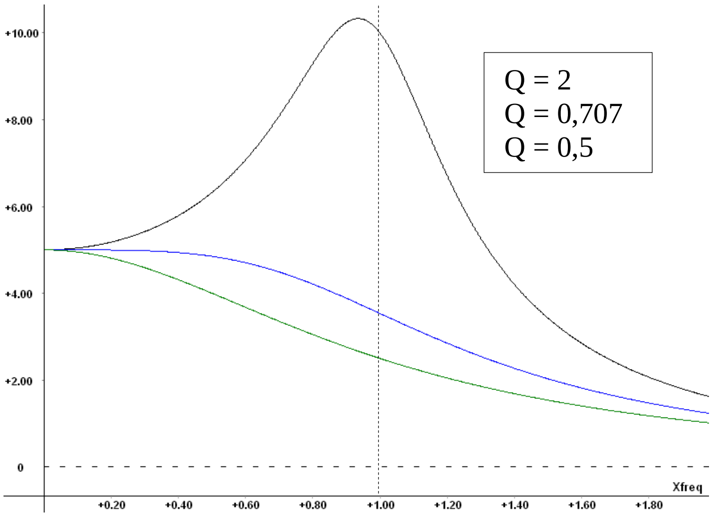
I_0 / I_{0res}



$\varphi_i - \varphi_e$ (rad)



U_C (V)



$\varphi_u - \varphi_e$ (rad)