Mécanique – TD7 : Champ de force centrale conservative

Exercice 1 : Nature de la trajectoire

On considère un mouvement à force centrale conservative (FCC), dérivant d'une énergie potentielle $\frac{K}{r}$. Le centre de force O est fixe dans le référentiel d'étude supposé galiléen.

1. Définir ce qu'est une force centrale conservative.

2. Donner la nature de cette force selon le signe de K. Citer deux grandeurs conservées dans ce type de mouvement.

3. Donner l'expression en coordonnées polaires de l'énergie mécanique d'un point matériel M de masse m soumis à cette force centrale uniquement. Exprimer cette énergie en fonction de la distance $r = OM$ uniquement.

4. Discuter la nature de la trajectoire en fonction de la valeur de l'énergie mécanique, dans les deux cas d'une force attractive ou répulsive.

5. Dans le cas où le point M est lié au centre de force, donner l'expression des distances minimale et maximale d'approche du point M.
Montrer que pour une valeur particulière de l'énergie mécanique, que l'on précisera, la trajectoire de M est circulaire. Donner le rayon de la trajectoire.

6. Dans le cas où le point M est dans un état de diffusion, donner l'expression de la distance minimale d'approche du point M.

Exercice 2 : Satellite géostationnaire

Un satellite est dit *géostationnaire* lorsqu'il est apparaît immobile vu depuis la Terre.

1. Montrer que le plan de l'orbite du satellite contient nécessairement le centre de la Terre (considérée sphérique).

2. En déduire qu'un tel satellite a obligatoirement une orbite contenue dans le plan équatorial.

3. Calculer à quelle altitude doit se situer un tel satellite, et donner sa vitesse de révolution.
Données : $R_T = 6400$ *km et* $g = 9{,}81\ m.s^{-2}$

Exercice 3 : Vitesse du satellite soumis aux frottements de l'air

Un satellite S est placé sur une orbite circulaire de rayon r_0.

1. Exprimer v_0, puis l'énergie totale E_0 de ce satellite, en fonction de r_0.

L'altitude du satellite étant peu élevée, il subit les frottements des hautes couches de l'atmosphère. Son énergie totale diminue alors avec le temps suivant la loi : $E = E_0 (1 + \alpha t)$ avec $\alpha > 0$, et $E_0 < 0$.
On suppose que les frottements sont suffisamment faibles pour que la trajectoire puisse être considérée comme circulaire sur quelques périodes.

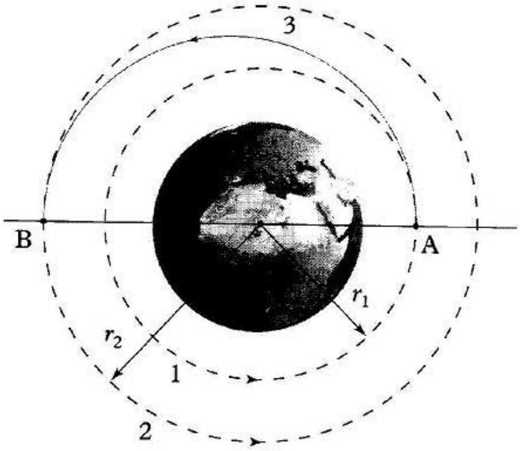
2. Déterminer le rayon r de la trajectoire et la vitesse v du satellite à l'instant t. En comparant les énergies, expliquer pourquoi la vitesse du satellite augmente alors qu'il est freiné par l'atmosphère.

Exercice 4 : Satellite terrestre en orbite circulaire

1. Calculer la vitesse v_c et la période T d'un satellite terrestre de masse m en orbite circulaire, en fonction de son altitude h, du rayon de la Terre R_T et du champ de pesanteur g au niveau du sol.

2. En déduire dans ce cas la troisième loi de Kepler.

Exercice 5 : Transfert d'orbite



On veut transférer un satellite S de masse m initialement sur une orbite circulaire basse de rayon $r_1 = R_T + 500\ km$ à une orbite circulaire haute de rayon $r_2 = R_T + 36000\ km$. Le satellite est en rotation autour de la Terre. Pour cela, on utilise une ellipse de transfert de Hohmann dont la Terre est un foyer.
Données : $R_T = 6400\ km$, $g = 9{,}81\ ms^{-2}$

1. Exprimer et calculer la vitesse v_1 du satellite sur l'orbite basse.

2. Exprimer l'énergie mécanique E_1 du satellite sur sa trajectoire basse.

3. Exprimer l'énergie mécanique E_3 du satellite sur l'ellipse de transfert.

4. Que faut-il apporter au satellite au point A pour qu'il passe sur l'ellipse de Hohmann ?
Exprimer et calculer l'écart de vitesse Δv_A^2 nécessaire.

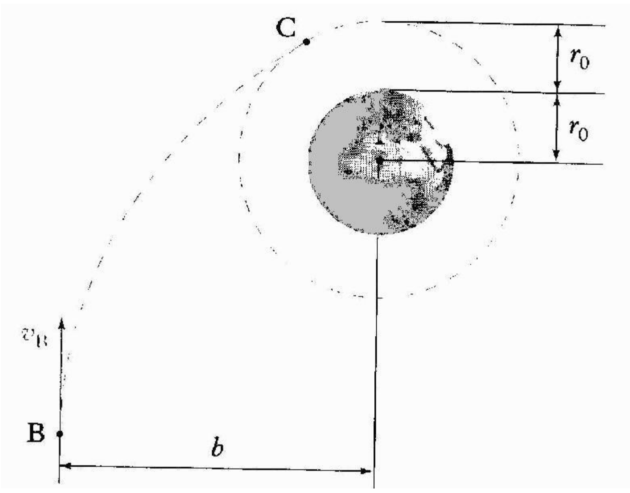
5. Quelle action faut-il avoir sur le satellite en B pour qu'il passe sur l'orbite circulaire haute ?
Exprimer et calculer l'écart de vitesse Δv_B^2 nécessaire.

6. Exprimer et calculer la durée du transfert (entre A et B).

Exercice 6 : Retour de mission spatiale

NB : Les grandeurs notées en gras sont des vecteurs.

On étudie un véhicule spatial S de masse m qui rentre sur Terre (masse M_T) après une longue mission.
Ce véhicule arrive au point B avec une vitesse $\mathbf{v_B}$ et présente « un paramètre d'impact » b (cf. figure).



1. Donner la nature de la trajectoire de S.

2. On veut que le véhicule spatial arrive au point C avec une vitesse tangente à l'orbite circulaire passant par C (de rayon $2r_0$). Déterminer puis calculer la distance b nécessaire.

3. Donner la distance minimale b_{min} pour que le véhicule spatial évite la Terre.

4. Au point C, on veut que le véhicule spatial passe sur l'orbite circulaire de rayon $2r_0$.
Que faut-il faire ? Déterminer puis calculer la variation du paramètre impliqué.

Exercice 7 : Trajectoire d'une comète

La Terre décrit autour du Soleil (de centre S) une orbite quasiment circulaire de rayon r_0 = 1,5 10^8 km à la vitesse $v_T = 30\ km.s^{-1}$. Une comète C passe extrêmement près du Soleil : distance au périhélie $r_p = \alpha r_0$ avec α = 0,005.

0. Exprimer la masse du Soleil à partir des données relatives à l'orbite terrestre.

1. En considérant que l'orbite de la comète est parabolique, calculer la vitesse v_{max} maximale de la comète.

Des mesures ont montré que l'orbite de la comète était en fait une ellipse d'excentricité $e = 1 - x$ avec x = 10^{-4}.
2. Jusqu'à quelle distance r_a la comète va-t-elle s'éloigner du Soleil ? Evaluer sa vitesse v_a à cette distance (aphélie). On pourra utiliser le résultat de la question 1.

3. Combien de temps la comète va-t-elle mettre pour repasser dans cette position extrême (aphélie) ?

4. Calculer v_{max} dans le cas de la trajectoire elliptique, et estimer l'erreur commise dans la question 1 où l'on avait supposé la trajectoire parabolique.

Exercice 8 : Loi de force centrale

Historiquement, l'expression de la loi de gravitation universelle a été établie par Newton afin d'interpréter, dans le cadre de la mécanique newtonienne, les observations faites sur le mouvement des planètes.
On procède ici dans le sens inverse du cours : on connaît la trajectoire des planètes, et on veut en déduire la forme de la loi de Newton en $\frac{K}{r^2}$. La trajectoire des planètes en coordonnées polaires est $r = \frac{p}{1+e\cos\theta}$.
1. Exprimer l'accélération de la planète en fonction de $u(\theta)$, où $u = 1/r$. On redémontre ici simplement une des deux formules de Binet.

2. En appliquant la RFD, montrer que la force de gravitation est une force en $1/r^2$.

3. (*facultatif*) Dans le même esprit, démontrer que la loi de force centrale pour des trajectoires en $r = a\cos(\theta)$ est une force en $1/r^5$.

Exercice 9 : Vecteur excentricité, une autre méthode pour déterminer la trajectoire

On considère un champ de force centrale conservative, dérivant d'une énergie potentielle $\frac{K}{r}$. On étudie le mouvement d'un point matériel M de masse m dans ce champ de force.

1. Rappeler les principales étapes des deux méthodes utilisées en cours pour établir l'équation de la trajectoire. Rappeler les expressions des trajectoires possibles suivant le signe de K.

On va utiliser ici une autre méthode pour parvenir au même résultat.

2. Appliquer la RFD au système étudié.

3. Exprimer $\overrightarrow{u_r}$ en fonction de la dérivée temporelle de $\overrightarrow{u_\theta}$. Reformuler alors l'équation obtenue précédemment.

4. En déduire l'expression du vecteur vitesse en fonction de $\overrightarrow{u_\theta}$ et d'un vecteur constant que l'on notera $\vec{e}$. Ce vecteur est appelé *vecteur excentricité* ; il s'agit d'un vecteur sans dimension qui est conservé dans le type de mouvement étudié ici.

5. Exprimer la composante orthoradiale de la vitesse en fonction du produit $\vec{e}\cdot\overrightarrow{u_\theta}$. En faisant appel à l'expression de la constante des aires, établir l'expression de $\frac{1}{r}$ en fonction de constantes et de $\overrightarrow{u_\theta}$.

6. On définit le repère cartésien (O,x,y) associé aux coordonnées polaires de telle sorte que le vecteur excentricité soit selon (Oy). Retrouver l'équation de la trajectoire, qui est une conique, et où l'excentricité e n'est autre que la norme du vecteur excentricité.