

## 2.4. Dérivées des vecteurs unitaires de $R_2$

On calcule les dérivées temporelles par analogies avec les formules établies pour le repère polaire en PCSI

On remarque alors que

$$\left(\frac{d\vec{e}_{x'}}{dt}\right)_{R_1} = \vec{\Omega} \wedge \vec{e}_{x'} \quad \text{et idem pour } \vec{e}_{y'}$$

## 3.1. Loi de composition des vitesses (cas translation)

Définition des vecteurs vitesses

$$\vec{v}_{M/R_1} = \left(\frac{d\vec{O_1M}}{dt}\right)_{R_1} ; \quad \vec{v}_{M/R_2} = \left(\frac{d\vec{O_2M}}{dt}\right)_{R_2}$$

Pourquoi  $\vec{O_2M}$  peut-il être dérivé indépendamment dans  $R_1$  et  $R_2$  ?

Parce que  $R_2$  étant en translation dans  $R_1$ , on peut prendre pour  $R_2$  la même BOND que  $R_1$

$$\vec{O_2M} = x'\vec{e}_x + y'\vec{e}_y + z'\vec{e}_z$$

Les deux BOND étant identiques, les dérivations temporelles dans  $R_1$  et  $R_2$  sont égales

$$\vec{O_1M} = \vec{O_1O_2} + \vec{O_2M}$$

On dérive par rapport au temps dans  $R_1$

$$\vec{v}_{M/R_1} = \vec{v}_{O_2/R_1} + \vec{v}_{M/R_2}$$

## 4.1. Loi composition vitesse (cas rotation uniforme)

- ★ Refaire un schéma des deux repères de référence  $R_1$  et  $R_2$
- ★ Exprimer  $\vec{OM}$  dans  $R_1$
- ★ L'exprimer aussi dans  $R_2$
- ★ Egaler les deux expressions, et les dériver temporellement dans  $R_1$ , en faisant apparaître le vecteur rotation
- ★ Identifier dans cette égalité la vitesse absolue et la vitesse relative

$$\vec{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z \quad \text{et} \quad \vec{OM} = x'\vec{e}_{x'} + y'\vec{e}_{y'} + z'\vec{e}_{z'}$$

On égale les deux expressions et en dérivant dans  $R_1$

$$\vec{v}_{M/R_1} = (\dot{x}'\vec{e}_{x'} + \dot{y}'\vec{e}_{y'} + \dot{z}'\vec{e}_{z'}) + x' \left(\frac{d\vec{e}_{x'}}{dt}\right)_{R_1} + y' \left(\frac{d\vec{e}_{y'}}{dt}\right)_{R_1} + z' \left(\frac{d\vec{e}_{z'}}{dt}\right)_{R_1}$$

$$\vec{v}_{M/R_1} = \vec{v}_{M/R_2} + x'\vec{\Omega} \wedge \vec{e}_{x'} + y'\vec{\Omega} \wedge \vec{e}_{y'} + z'\vec{\Omega} \wedge \vec{e}_{z'}$$

$$\vec{v}_{M/R_1} = \vec{v}_{M/R_2} + \vec{\Omega} \wedge \vec{OM}$$

## 4.2. Loi composition accélération (cas rotation uniforme)

On repart de l'expression établie au 4<sup>e</sup> point du raisonnement précédent :

- ★ La dériver temporellement dans  $R_1$
- ★ Identifier l'accélération absolue et l'accélération relative
- ★ Remarquer qu'un des termes restants s'identifie à  $-\omega^2 \vec{HM}$  où  $H$  est le projeté de  $M$  sur l'axe de rotation
- ★ Vérifier que l'autre terme s'écrit bien  $2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{M/R_2}$

$$(\dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z) = (\dot{x}'\vec{e}_{x'} + \dot{y}'\vec{e}_{y'} + \dot{z}'\vec{e}_{z'}) + \vec{\Omega} \wedge \vec{OM}$$

On dérive par rapport au temps, dans  $R_1$

$$(\ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z) = (\ddot{x}'\vec{e}_{x'} + \ddot{y}'\vec{e}_{y'} + \ddot{z}'\vec{e}_{z'}) + \vec{\Omega} \wedge (\dot{x}'\vec{e}_{x'} + \dot{y}'\vec{e}_{y'} + \dot{z}'\vec{e}_{z'}) + \vec{\Omega} \wedge \left(\frac{d\vec{OM}}{dt}\right)_{R_1}$$

$$\vec{a}_{M/R_1} = \vec{a}_{M/R_2} + \vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{M/R_2} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{v}_{M/R_2} + \vec{\Omega} \wedge \vec{OM})$$

$$\begin{aligned} \vec{a}_{M/R_1} = \vec{a}_{M/R_2} + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{M/R_2} + \omega \vec{e}_z \wedge (\omega \vec{e}_z \wedge (x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z)) \\ \dots + \omega^2 \vec{e}_z \wedge (x\vec{e}_y - y\vec{e}_x) \\ \dots - \omega^2 (x\vec{e}_x + y\vec{e}_y) \end{aligned}$$

$$\vec{a}_{M/R_1} = \vec{a}_{M/R_2} + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{M/R_2} - \omega^2 \vec{HM}$$

avec  $H$  le projeté de  $M$  sur l'axe de rotation