

Thermodynamique Chap.2 – Doc principal

Diffusion thermique, transport d'énergie par conduction

1. Formulation infinitésimale des principes de la thermodynamique

- 1.1. Premier principe sur une durée élémentaire
- 1.2. Deuxième principe sur une durée élémentaire

2. Description de la diffusion thermique

- 2.1. Les trois types de transferts thermiques
- 2.2. Flux thermique (= Puissance thermique) et Vecteur puissance surfacique
- 2.3. EQ thermodynamique local

3. Lois de la diffusion thermique

- 3.1. Les trois étapes pour établir l'équation de diffusion
- 3.2. Bilan d'énergie : 1^{er} principe de la thermodynamique
- 3.3. Cas avec production et disparition d'énergie
- 3.4. Conduction thermique : loi phénoménologique de Fourier
- 3.5. Equation de diffusion : « équation de la chaleur »
- 3.6. Conditions aux limites
- 3.7. Conducto-convection : un terme de perte dans l'équation locale

4. Exploitations de l'équation de diffusion

- 4.1. Les phénomènes diffusifs sont *irréversibles*
- 4.2. Longueur et temps caractéristiques de diffusion

5. Solution dans le cas stationnaire – Résistance thermique (PAS effet Joule)

- 5.1. Résistance thermique d'un barreau rectiligne
- 5.2. Résistance thermique en géométrie cylindrique, puis sphérique
- 5.3. (Complément) ARQS – Analogie électrique avec le circuit RC

6. Applications de la notion de résistance thermique

- 6.1. Double vitrage
- 6.2. Température de contact et sensation de chaud
- 6.3. Résistance thermique de conducto-convection

Intro : Lorsqu'une barre de métal est mise en contact avec un corps chaud (pic de brochette dans le feu par exemple), on observe que la température augmente progressivement tout le long de la barre. On dit que « la chaleur diffuse » dans le métal. Il y a transport d'énergie thermique à l'échelle microscopique. C'est un des trois modes du transfert thermique : *la diffusion thermique*.

L'objectif du chapitre est tout d'abord *d'établir l'équation aux dérivées partielles* vérifiées par le champ de température, dans le matériau où se produit la diffusion thermique. On s'appuie pour cela sur l'équation locale de conservation de l'énergie (c'est le *premier principe écrit sous forme locale*), et sur l'analogue de la loi de Fick : *la loi de Fourier*. On se focalise ensuite sur le régime *stationnaire*, pour lequel on peut introduire la notion de *résistance thermique*.

1. Formulation infinitésimale des principes de la thermodynamique

En première année, les deux principes de la thermodynamique ont été énoncés pour une transformation de durée finie. Nous les énonçons ici pour une durée élémentaire.

1.1. Premier principe sur une durée élémentaire

➤ Activité 1 : Rappels

1.2. Deuxième principe sur une durée élémentaire

➤ Activité 2 : Rappels

2. Description de la diffusion thermique

2.1. Les trois types de transferts thermiques

L'échange d'énergie entre le système étudié et l'extérieur peut s'effectuer : via le travail d'une force ; via un transfert thermique.

Il existe trois modes de transferts thermiques :

- l'échange par **convection**
- l'échange par **diffusion** (le seul traité dans ce chapitre)
- l'échange par **rayonnement**

❖ Donner un exemple concret pour chaque type de transfert thermique. Dans chaque cas, préciser sous quelle forme est transportée l'énergie.

Le « moteur » de la diffusion thermique (comme pour tous les phénomènes de diffusion) est l'agitation thermique. C'est un « moteur » microscopique.

Grandeurs impliquées dans la diffusion thermique

Température et énergies (deux énergies : énergie interne + transfert thermique)

Cause et conséquence de la diffusion thermique

*La cause de la diffusion thermique est la non-uniformité de la température du matériau.
La diffusion tend à homogénéiser la température.*

<https://www.youtube.com/watch?v=h0dgQRN9qeo>

➤ Activité 3 : Rappels capacité thermique

2.2. Flux thermique (= Puissance thermique) et Vecteur puissance surfacique

Lorsqu'une barre de métal est mise en contact avec un corps chaud (pic de brochette dans le feu par exemple), on observe que la température augmente progressivement tout le long de la barre.

On dit que la « la chaleur diffuse » dans le métal. Il y a transport d'énergie thermique, et on peut définir un débit (ou flux, ou courant) associé à ce transport : c'est tout simplement **la chaleur Q transférée par unité de temps** à travers une surface.

Définition du flux thermique Φ_{th} à travers une surface

$$\delta Q_{trav} \stackrel{\text{def}}{=} \Phi_{th} dt$$

Le flux thermique est l'énergie thermique qui traverse une surface par unité de temps.
On l'appelle aussi **puissance thermique**, parfois notée **P_{th}**

- ❖ Donner les unités de chaque grandeur, et expliquer leur signification sur un schéma.

Définition du vecteur puissance surfacique
ou « vecteur densité de courant thermique »

Tout débit est associé à un vecteur densité de courant. La puissance thermique ne fait pas exception :

$$\Phi_{th} \stackrel{\text{def}}{=} \iint_S \vec{j}_{th} \cdot \vec{dS}$$

2.3. EQ thermodynamique local

Nous étudions dans ce chapitre des systèmes macroscopiques *hors équilibre thermodynamique*. En effet, à l'équilibre thermodynamique la température du système est nécessairement uniforme, il ne peut plus y avoir diffusion.

Or l'application des principes de la thermodynamique n'est possible qu'entre deux instants où les paramètres d'état intensifs peuvent être définis (état d'équilibre interne).

L'hypothèse « d'équilibre thermodynamique local » consiste à affirmer qu'il est possible de définir une échelle spatiale, dite mésoscopique :

- à laquelle les grandeurs intensives peuvent être définies. L'aspect granulaire de la répartition de matière n'est pas encore perceptible, et les fluctuations associées (mouvement brownien p.e.) sont négligeables
- à laquelle ces grandeurs intensives peuvent être considérées uniformes (localement à l'équilibre donc)

C'est finalement ce que nous avons déjà fait à plusieurs reprises, lorsque nous avons écrit les équations de conservation à l'échelle mésoscopique.

➤ **Activité 4 : S'approprier**

3. Lois de la diffusion thermique

L'objectif est ici de déterminer l'équation différentielle de diffusion de la température $T(\vec{r}, t)$. Sa résolution permet alors de prédire/décrire/comprendre le processus de diffusion.

Pour cela, on va se doter de deux lois. La première est *universelle* car elle est générale : c'est la loi de conservation de l'énergie (1^{er} principe). La seconde est *phénoménologique*, issue d'observations expérimentales : c'est la loi de Fourier (analogue à la loi de Fick).

3.1. Les trois étapes pour établir l'équation de diffusion

L'équation de diffusion ne doit faire apparaître que la température :

- un bilan d'énergie sur un volume élémentaire (i.e. l'application du 1^{er} principe) nous donnera une relation entre u (énergie interne volumique) et le vecteur densité de courant $\vec{j}_{th}$
- la loi de Fourier nous donnera une relation entre $\vec{j}_{th}$ et T
- la capacité thermique du matériau nous donnera une relation entre u et T

Pour les deux modèles idéaux décrivant la matière en thermodynamique (gaz parfait, et PCII), on rappelle que la *température d'un volume élémentaire est une mesure de son énergie interne*. Cela reste une bonne approximation pour la plupart des matériaux.

3.2. Bilan d'énergie : 1^{er} principe de la thermodynamique

➤ **Activité 5 : Raisonnement canonique** ⚡

Equation locale de conservation de l'énergie thermique

1^{er} principe local sans terme de travail

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \text{div}(\vec{J}_{th}) = 0$$

C'est la version locale du 1^{er} principe, sans terme de travail.

Pour établir l'équation de diffusion, on souhaite ne conserver que le champ de température, on peut déjà remplacer le terme d'énergie interne via la capacité thermique massique c (modèle PCII) :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \text{div}(\vec{J}_{th}) = 0$$

3.3. Cas avec production et disparition d'énergie

L'énergie est une grandeur qui se conserve, si l'on considère *toutes les formes d'énergie*. Or souvent en exercice, *on ne considère que les formes thermiques* : énergie interne, transfert thermique ; sans tenir compte par exemple :

- de l'énergie des liaisons chimiques, libérée sous forme thermique lors de réactions (endo/exo)thermiques
- de l'énergie interne produite par l'effet Joule ou par des frottements mécaniques
- de l'énergie des liaisons entre nucléons libérée sous forme thermique lors de réaction nucléaire

Pour pallier au fait que ces énergies autres que thermiques ne sont pas comptabilisées, il faut ajouter un terme de « création ou disparition » d'énergie.

- ❖ Faire apparaître les taux de production et de disparition d'énergie τ_p et τ_d dans l'équation locale (définis positifs). Préciser leur unité.

Cas particulier de l'effet Joule (le seul au programme) :

L'effet Joule est une conversion de travail électrique en énergie interne. Pour un système macroscopique :

$$\Delta U = W_{elec}$$

En exercice, le travail électrique est *souvent traité comme un terme de création* (car d'origine non-thermique).

➤ **Activité 6 : Raisonnement canonique** ⚡

3.4. Conduction thermique : loi phénoménologique de Fourier

On dispose d'une équation scalaire et de 4 inconnues scalaires (T et $\vec{j}$). Il nous manque 3 équations scalaires reliant nos 4 inconnues. En traduisant mathématiquement les observations expérimentales ci-dessous, et en supposant la relation linéaire (« DL 1^{er} ordre »), on obtient la loi de Fourier.

Les observations expérimentales montrent que :

- le flux de chaleur croît avec la non-uniformité de la température
- le flux de chaleur va des zones les plus chaudes vers les zones les moins chaudes

Loi de Fourier
(relation entre la cause et l'effet de la diffusion)

$$\vec{j}_{th} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}(T)$$

$\lambda > 0$ est la **conductivité thermique** (en $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$). Elle dépend du matériau.

	Air	Polystyrène expansé	Eau	Bois	Verre	Béton	Acier	Cuivre
$\lambda (Wm^{-1}K^{-1})$	0,03	0,004	0,6	0,3	0,5 à 2	1	20	400

3.5. Equation de diffusion : « équation de la chaleur »

➤ Activité 7 : Raisonnement canonique ★

Equation de la chaleur
(sans effet Joule + sans conducto-convection)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \Delta T$$

avec $D = \frac{\lambda}{\rho c}$ la **diffusivité thermique** (en $m^2 \cdot s^{-1}$)

Ordres de grandeur :

- $D_{Cu} = 117 \cdot 10^{-6} m^2 \cdot s^{-1}$
- $D_{eau} = 10^{-7} m^2 \cdot s^{-1}$
- $D_{polystyrène} = 4 \cdot 10^{-7} m^2 \cdot s^{-1}$

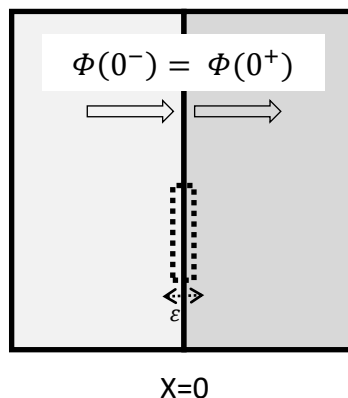
La diffusivité thermique est de l'ordre de grandeur de la diffusivité particulaire dans les gaz (la plus grande donc). Ainsi, la diffusion thermique est en général un processus plus rapide que la diffusion particulaire.

3.6. Conditions aux limites

L'équation de diffusion contient une dérivée du 1^{er} ordre en temps et du 2^e ordre en position. Pour déterminer la solution d'une diffusion unidimensionnelle, il faut se doter de :

- **1 condition initiale** (relative à la dépendance temporelle)
- **2 conditions aux limites** (relatives à la coordonnée spatiale)

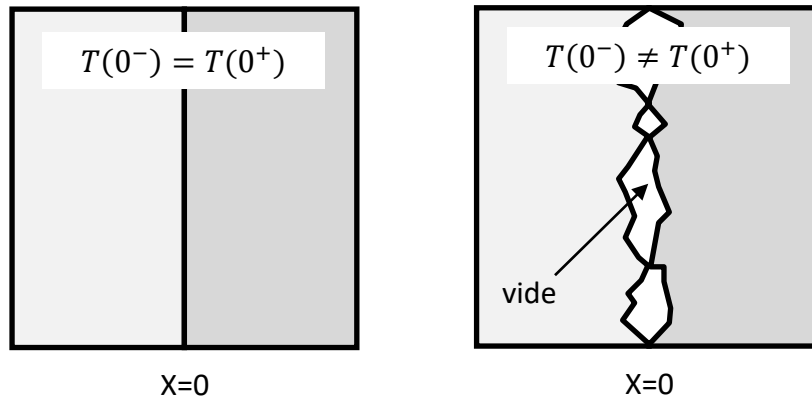
Il faut 6 conditions à la limite dans le cas tridimensionnel. On énonce ci-dessous plusieurs propriétés utiles pour déterminer les conditions aux limites en exercice.



Continuité du flux thermique

*Le flux thermique est une **fonction continue de la position**.
Il est donc nécessairement le même de part et d'autre d'une interface entre deux milieux.*

- ★ Démontrer cet énoncé en définissant un système infiniment petit à cheval sur l'interface, et faire tendre sa dimension longitudinale vers zéro.

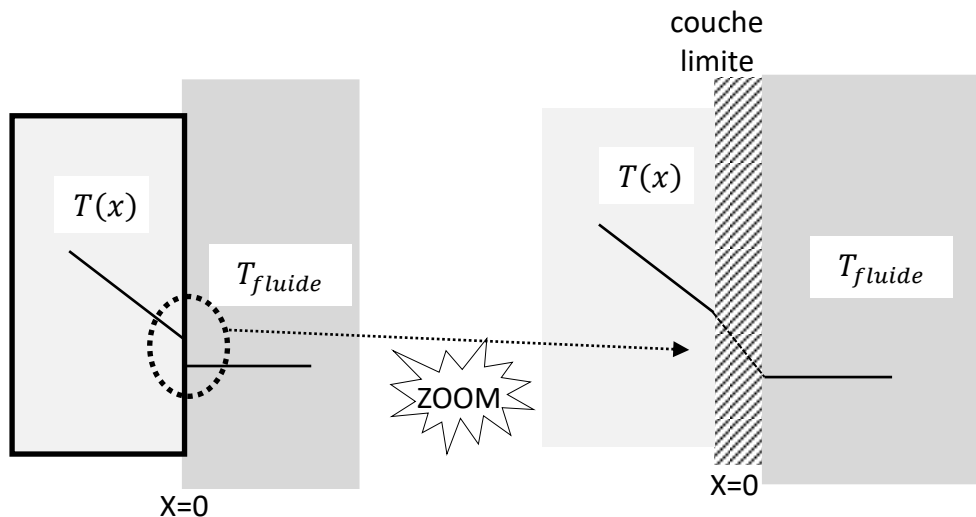


Continuité de la température en un point de contact thermique parfait

*Deux corps sont en contact parfait lorsque tous les points des deux zones jointes sont effectivement en contact.
Il n'y a alors pas d'espace vide (ou de 3^e corps) interposé entre les deux corps.
Dans ce cas, la température est une fonction continue de la position.*

On admet cette propriété comme étant issue de l'expérience. Essayons tout de même de la comprendre de manière intuitive : il semble que cette propriété découle directement de l'existence de l'équilibre thermodynamique local. Quand on met en contact deux corps non-miscibles (solide-solide, ou solide-fluide le plus souvent) initialement de température différente, la diffusion thermique qui s'opère au niveau de l'interface sur une échelle mésoscopique est d'autant plus intense que la différence de température est importante. Aussi, en un temps nécessairement inférieur aux autres échanges d'énergie étudiés à l'échelle macroscopique, la température devient uniforme dans une zone mésoscopique autour de l'interface : c'est d'ailleurs une nécessité pour que le concept de température possède encore une signification précise autour de l'interface.

Evidemment, si le contact est irrégulier, s'il existe des « cavités » de taille significative (vides ou emplies d'un 3^e corps, de l'air par exemple) alors cette uniformisation de la température autour de l'interface n'est plus possible, et la température peut être localement discontinue.



Discontinuité de la température à une interface solide - liquide

*L'échange d'énergie thermique entre une paroi solide et un **fluide circulant à son contact**, peut être modélisé en première approximation (loi phénoménologique) par la loi de Newton :*

$$P_{sol \rightarrow liq} = h S (T_{sol} - T_{liq})$$

où S est la surface d'échange, h un coefficient de proportionnalité et ΔT la différence de température entre la paroi et le fluide. La circulation du fluide peut être forcée, ou spontanée (Archimède).

On notera qu'il n'y a pas contradiction avec l'encadré précédent. Lorsqu'un fluide s'écoule autour d'un solide, il existe une « couche limite » dans laquelle le fluide « colle » à la paroi. Le gradient de température dans cette couche limite est important. Si l'on modélise la situation en négligeant l'épaisseur de la couche limite, il faut alors modéliser la température comme étant une fonction discontinue de l'espace, passant brutalement de celle du solide à celle du liquide circulant : c'est ce qui est fait dans l'énoncé de la loi de Newton.

Flux thermique au niveau d'une paroi calorifugée

Le flux thermique dirigé selon la normale à une paroi calorifugée est nul par définition.

3.7. Conducto-convection : un terme de perte dans l'équation locale

➤ **Activité 8 : Exemple canonique** ⚡

*Dans la suite du chapitre, la situation canonique est celle d'une diffusion thermique pure :
pas d'effet Joule ni de conducto-convection.*

4. Exploitations de l'équation de diffusion

4.1. Les phénomènes diffusifs sont irréversibles

Inverser le sens du temps ($t \rightarrow -t'$) ne laisse pas l'équation de diffusion invariante : *la diffusion est irréversible.*

4.2. Longueur et temps caractéristiques de diffusion

Via un raisonnement par ordre de grandeur, on établit le lien entre *longueur caractéristique* et *temps caractéristique* de diffusion :

La diffusion est un processus lent à grande distance :
$$L_c^2 = D \tau_c$$

Il faut donc 4 fois plus de temps pour diffuser deux fois plus loin.

5. Solution dans le cas stationnaire – Résistance thermique (PAS effet Joule)

5.1. Résistance thermique d'un barreau rectiligne

➤ **Activité 9 : Raisonnement canonique** ⚡

Résistance thermique en régime stationnaire (et sans effet Joule)

En régime stationnaire la différence de température aux extrémités et la puissance thermique sont proportionnels

$$\Delta T = R_{th} \phi$$

à écrire en « convention récepteur »

*le coefficient de proportionnalité étant par définition la **résistance thermique** (par analogie avec la loi d'Ohm)*

*NB : il ne doit pas y avoir de création d'énergie thermique dans le milieu (effet Joule par exemple)
pour utiliser le concept de résistance thermique*

Expression de la résistance thermique en fonction des dimensions

Dans un barreau rectiligne de longueur L et de section S :

$$R_{th} = \frac{L}{\lambda S}$$

L'expression de la résistance thermique en fonction de la géométrie d'un barreau cylindrique est à retenir par cœur. C'est la même expression que la résistance électrique d'un barreau métallique (sera vu plus tard).

- ❖ Trouver un exemple concret (fuite thermique à travers les éléments délimitant la salle de classe par exemple) :
 - de résistances thermiques en série
 - de résistances thermiques en parallèle

5.2. Résistance thermique en géométrie cylindrique, puis sphérique

➤ **Activité 10 : Exemple canonique** ⚡

➤ **Activité 11 : Exemple canonique** ⚡

5.3. (Complément) ARQS – Analogie électrique avec le circuit RC

- ⚡ Enoncer le critère qui doit être vérifié pour que l'ARQS soit valide dans l'étude des circuits électriques
- ⚡ En électricité, que peut-on dire quand l'ARQS est vérifiée (« à quoi ça sert de se placer dans l'ARQS ») ?

Il s'agit de transposer cette notion dans le cadre de la diffusion thermique. Considérons le cas simple d'un barreau métallique rectiligne de longueur L . Le régime stationnaire est ensuite réalisé expérimentalement en gardant constante les températures fixées aux bornes du barreau. Un régime variable est réalisé en faisant varier la différence de température aux bornes avec le temps : on note τ_{var} le temps caractéristique de ce régime variable.

Intérêt de la notion d'ARQS thermique

Un régime variable sera qualifié de « quasi-stationnaire » s'il est suffisamment « lentement variable » pour que la notion de résistance thermique puisse être encore utilisée (le flux thermique est alors conservatif)

- ⚡ Quelle est la relation de la diffusion thermique analogue à la loi des nœuds en régime stationnaire ?
- ⚡ Quel est l'analogue thermique τ_{diff} du « temps de propagation de l'onde électromagnétique » ?
- ⚡ Par analogie avec l'électricité, donner le critère de validité de l'ARQS thermique
- ⚡ Préciser ce critère lorsque le régime variable est sinusoïdal de fréquence f

Exemple : dispositif thermique analogue au circuit RC série

Considérons une maison modélisée simplement par une seule pièce délimitée par six faces (quatre murs, le sol et le plafond). La température initiale de l'intérieur de la pièce est notée T_i , la température de l'air extérieur est constante et uniforme et notée T_{ext} . A $t = 0$, la chaudière tombe en panne et la maison n'est plus chauffée de l'intérieur. Seules les fuites thermiques à travers les murs subsistent.

- ⚡ Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la température de l'air intérieur $T(t)$ en fonction :
 - de la résistance thermique totale R_{th} des murs, du plafond (sol supposé athermane)
 - de la capacité thermique à volume constant C_v de toute la matière située à l'intérieur de la pièce
- ⚡ En déduire $T(t)$
- ⚡ Modéliser la situation par un circuit électrique, en faisant apparaître sur ce schéma T_{ext} , Φ , R_{th} , C_v et $T(t)$
- ⚡ Donner les relations « différence de température – flux thermique » aux bornes des deux dipôles thermiques ainsi identifiés
- ⚡ A quelle condition notre calcul utilisant la notion de résistance thermique est-il valable ?

6. Applications de la notion de résistance thermique

6.1. Double vitrage

On considère un double vitrage constitué :

- d'une vitre de surface S , d'épaisseur $e/3$ et de conductivité λ
- d'une seconde vitre de même caractéristique
- d'une couche de gaz situé entre les deux vitres, d'épaisseur $e/3$ et de conductivité $\lambda' \sim \lambda/100$

❖ Expliquer l'intérêt de ce dispositif pour l'isolation thermique.

6.2. Température de contact et sensation de chaud

Lorsque l'on pose la main sur une table en bois ou sur une table en acier, celle en bois semble « plus chaude » que celle en acier, même si ces deux tables sont à la même température, car en équilibre thermique avec l'air ambiant de la même pièce.

On se propose d'interpréter cette observation en considérant la situation simplifiée suivante :

- la main et la table sont assimilées à des cubes de côté L . Ces cubes sont en contact. Ils sont calorifugés, sauf au niveau de la surface de contact.
- Les extrémités des deux cubes qui ne sont pas en contact sont à des températures fixées : respectivement T_1 pour la main (de conductivité λ_1) et $T_2 < T_1$ pour la table (conductivité λ_2)
- la main et la table sont en contact depuis assez longtemps pour considérer le *régime permanent établi*
- On suppose qu'en régime établi les températures des deux surfaces en contact sont égales. On appelle cette température « température de contact ».
- ce sont les nerfs du bout des doigts qui provoquent la sensation de chaleur

Calculer la température de contact en fonction de T_1 , T_2 , λ_1 et λ_2 .

Expliquer pourquoi une table en bois semble « plus chaude » qu'une table en acier.

6.3. Résistance thermique de conducto-convection

Soit une canalisation cylindrique rectiligne infinie, dans laquelle circule de l'eau à la température T_e (uniforme):

- canalisation de rayon intérieur r_1 et extérieur r_2 , conductivité thermique λ_1
- coefficient conducto-convectif h_1 entre l'eau et la conduite
- coefficient h_2 entre la conduite et l'air ambiant à température T_0

❖ Etablir l'expression de la résistance thermique totale pour une longueur L de tuyau (diffusion dans conduite et gaine, et échanges conducto-convectif entre eau-conduite et conduite-air)

Réponse :
$$R_{th} = \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi\lambda_1 L} + \frac{1}{2\pi r_1 h_1 L} + \frac{1}{2\pi r_2 h_2 L}$$

Dans la partie « **Diffusion thermique** », la mise en équations de la diffusion thermique est limitée au cas des solides ; on peut étendre les résultats ainsi établis aux milieux fluides en l'absence de convection en affirmant la généralisation des équations obtenues dans les solides. La loi phénoménologique de Newton à l'interface entre un solide et un fluide peut être utilisée dès lors qu'elle est fournie.

Notions et contenus	Capacités exigibles
3.3. Diffusion thermique	
Vecteur densité de flux thermique $\mathbf{j}_q$	Exprimer le flux thermique à travers une surface orientée en utilisant le vecteur $\mathbf{j}_q$.
Premier principe de la thermodynamique.	Établir, pour un milieu solide, l'équation locale traduisant le premier principe dans le cas d'un problème ne dépendant qu'une d'une seule coordonnée d'espace en coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques, éventuellement en présence de sources internes. Utiliser l'opérateur divergence et son expression fournie pour exprimer le bilan local dans le cas d'une géométrie quelconque, éventuellement en présence de sources internes.
Loi de Fourier.	Utiliser la loi de Fourier. Citer quelques ordres de grandeur de conductivité thermique dans les conditions usuelles : air, eau, béton, métaux.
Régimes stationnaires. Résistance thermique.	Utiliser la conservation du flux thermique sous forme locale ou globale en l'absence de source interne. Définir la notion de résistance thermique par analogie avec l'électrocinétique. Établir l'expression d'une résistance thermique dans le cas d'un modèle unidimensionnel. Utiliser les lois d'associations de résistances thermiques.

Équation de la diffusion thermique.	Établir une équation de diffusion thermique. Utiliser l'opérateur laplacien et son expression fournie pour écrire l'équation de diffusion dans le cas d'une géométrie quelconque. Analyser une équation de diffusion en ordres de grandeur pour relier des échelles caractéristiques spatiale et temporelle. Utiliser la loi de Newton fournie comme condition aux limites à une interface solide-fluide. <u>Capacité numérique</u> : à l'aide d'un langage de programmation, résoudre l'équation de la diffusion thermique à une dimension par une méthode des différences finies dérivée de la méthode d'Euler explicite de résolution des équations différentielles ordinaires. Mettre en œuvre un dispositif expérimental utilisant une caméra thermique ou un capteur dans le domaine des infrarouges.
Laplacien d'un champ scalaire.	Définir le laplacien à l'aide de la divergence et du gradient. Exprimer le laplacien en coordonnées cartésiennes.
4. Équations aux dérivées partielles	
Exemples d'équations aux dérivées partielles : équation de Laplace, équation de diffusion, équation de d'Alembert, équation de Schrödinger.	Identifier une équation aux dérivées partielles connue. Transposer une solution familière dans un domaine de la physique à un autre domaine. Obtenir des solutions de forme donnée par substitution. Utiliser des conditions initiales et des conditions aux limites