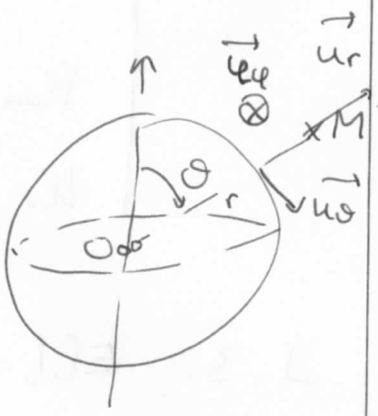
E3A PSI 2015 : EStat

H.1. Invces par rotat° angles θ et φ

$$\Longrightarrow \vec{E}(M) = \begin{vmatrix} E_r(r) \\ E_\theta(r) \\ E_\varphi(r) \end{vmatrix}$$



H.2. Plans sym^ie :

$$\left.\begin{matrix}(M, \vec{u_r}, \vec{u_\theta}) \\ (M, \vec{u_r}, \vec{u_\varphi})\end{matrix}\right\} \vec{E} \text{ selon } \vec{u_r}$$

d'où $\boxed{\vec{E}(M) = E(r)\,\vec{u_r}}$

H.3. M ext : Sgauss sphère centre O rayon r

$$\underset{S_{gauss}}{\oint\!\!\oint} \vec{E}\cdot\vec{dS} = E(r)\, 4\pi r^2$$

$$\frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\iiint \rho\, d\tau}{\varepsilon_0} = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi R^3}{\varepsilon_0}$$

Th. Gauss : $E(r) = \dfrac{1}{4\pi r^2} \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0} 4\pi R^3$

$$\boxed{\vec{E}(M) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}} \quad r \geq R$$

H.4. M à l'int : $\dfrac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \dfrac{\rho \frac{4}{3}\pi r^3}{\varepsilon_0}$

$$\boxed{\vec{E}(M) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\, r\, \vec{u_r}} \quad r \leq R.$$

I.1. $u_e = \dfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$

I.2. $\mathcal{E} = \underset{\substack{M \in \text{tout} \\ \text{l'espace} \\ \text{où } \exists \vec{E}}}{\iiint} \dfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2(M)\, d\tau$

$$\left.= \underset{\substack{M \in \text{int.} \\ \text{sphère}}}{\iiint} \dots + \underset{\substack{M \in \text{ext} \\ \text{sphère}}}{\iiint} \dots \right\} \text{Chasles.}$$

$$\text{Car } = \underbrace{\int_{r=0}^{R}}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \dots + \underbrace{\int_{r=R}^{+\infty}}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \dots$$

Chasles sur coo. (r)

I.3. $d\tau = \underbrace{dr} \times \underbrace{r\,d\theta} \times \underbrace{r\sin\theta\, d\varphi}$

les 3 déplac^t él^taires.

$$\mathcal{E} = \int_{r=0}^{R} \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{\rho^2}{9\varepsilon_0^2} r^4 dr \underbrace{\iint \sin\theta \, d\theta \, d\varphi}_{4\pi} \text{ facile !}$$

$$+ \int_{r=R}^{+\infty} \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{\rho^2 R^6}{9\varepsilon_0^2 r^2} dr \iint \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$\mathcal{E} = \frac{\rho^2 4\pi}{18\varepsilon_0}\frac{R^5}{5} + \frac{4\pi}{18\varepsilon_0}\rho^2 R^6 \underbrace{\left[-\frac{1}{r}\right]_R^{+\infty}}_{\frac{1}{R}}$$

$$\mathcal{E} = \frac{2\pi}{9\varepsilon_0}\rho^2 \frac{6R^5}{5}$$

$$\text{Or } Q^2 = \frac{16\pi^2}{9} R^6 \rho^2 \Rightarrow R^6 \rho^2 = \frac{9Q^2}{16\pi^2}$$

d'où $\boxed{\mathcal{E} = \frac{4\pi \, 9 Q^2}{3\varepsilon_0 \times 5R \, 16\pi^2} = \frac{3}{5}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R}}$

$\beta = 0,6 \sim 1.$

J.1. Je pense que la réponse attendue est "noyaux lourds"...

hors pgm

J.2. Par déf°, en supposant μ uniforme :

$\frac{A}{V} = \mu$ A : nb nucléons, V : volume noyau

d'où $\boxed{R = \left(\frac{3}{4\pi}\frac{A}{\mu}\right)^{1/3}}$

AN : Uranium $R_u = 7,4$ fm ($\to 10^{-15}$ m)

Ba $R_{Ba} = 6,2$ fm

Kr $R_{Kr} = 5,4$ fm.

J.3. $E_{lib} = \mathcal{E}_{Ur} - \mathcal{E}_{Ba} - \mathcal{E}_{Kr}$

$$E_{lib} = \frac{3 \times (1,6\,10^{-19})^2}{20\pi\varepsilon_0}\left[\frac{92^2}{7,4} - \frac{56^2}{6,2} - \frac{36^2}{5,4}\right] 10^{15}$$

$$E_{lib} = 10^9 \times 10^{-38}\, 10^{15} \times 5502$$

$$= 5,5 \; 10^{-11} \text{ J} \quad \to \frac{1}{1,6\,10^{-19}} \text{ eV}$$

$\boxed{E_{lib} = 3,4\;10^8 \text{ eV} = 340 \text{ MeV}} \to$ odg OK avec énoncé.

J.4. $\mathcal{E}$ est prop^{el} à $\frac{Z^2}{A^{1/3}}$, qd il y a fusion

hors pgm

$Z_{nouveau} = Z_1 + Z_2$ $\nearrow \to \mathcal{E}$ semble $\nearrow$ qd $\exists$ fusion...

$A_{nouveau} \geqslant$ ~~A~~$A_1 + A_2$ car nb neutrons $\nearrow$ qd noyaux lourds