CCP PSI 2008 : effet peau

B.22 **NB** : on ne néglige pas pesanteur et en $z=h$ pression vaut P_0.

$\rightarrow$ $\vec{v} = v(x,y,z,t)\,\vec{e_x}$ ↳ mvt le long de plaque

$\rightarrow$ Invariance du pb par translat° selon $\vec{e_y} \Rightarrow v(x,z,t)$

$\rightarrow$ Incompressibilité $\Rightarrow \mathrm{div}\,\vec{v} = 0$

$\Rightarrow \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \Rightarrow \boxed{v(z,t)}$

(z+dz)

B.23. $(\vec{v}.\vec{\mathrm{grad}})\vec{v} = v_x \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_z \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial z}$

$= v\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial x} = \vec{0}$

Avec formule énoncé :

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2}\vec{\mathrm{grad}}\,v^2 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \partial(v^2)/\partial z \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 2v\,\partial v/\partial z \end{vmatrix} \\ (\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{v})\wedge\vec{v} = \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{\partial v}{\partial z} \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \\ \\ -v\frac{\partial v}{\partial z} \end{vmatrix} \end{array}\right\} \text{(CQFD)}$$

Project° NStokes :

$(\vec{u_x})$: $\rho\dfrac{\partial v}{\partial t} = -\dfrac{\partial P}{\partial x} + \eta\dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}$

$(\vec{u_y})$: $0 = -\dfrac{\partial P}{\partial y} + 0 + 0 \rightarrow P(x,z)$

$(\vec{u_z})$: $0 = -\dfrac{\partial P}{\partial z} - \rho g$

$\Rightarrow P(x,z) = -\rho g z + \underbrace{A(x)}_{C^{te}\text{ de } z}$ (car $\rho = C^{te}$)

CLimite : $P(x, z=h) = P_0\ \forall x$

$\forall x,\ -\rho g h + A(x) = P_0 \Rightarrow \underbrace{A(x)}_{\text{indpt } x \text{ aussi !}} = P_0 + \rho g h$

$\boxed{P(z) = P_0 + \rho g(h-z)}$ CQFD

(1) $(\vec{u_x})$ $\boxed{\rho\dfrac{\partial v}{\partial t} = \eta\dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}}$ car $\dfrac{\partial P}{\partial x} = 0$

$\boxed{K = \dfrac{\eta}{\rho}}$: viscosité cinématique

B.24 ①

$$\boxed{\underline{f}(z)\cdot i\omega = K\,\underline{f}''(z)}$$

④ Trinôme : $\underline{r}^2 - \frac{i\omega}{K}\underline{r}^0 = 0$

$$\underline{r}^2 = \frac{i\omega}{K} = \frac{\omega}{K} e^{i\frac{\pi}{2}}$$

Sol° : $\underline{r} = \pm\sqrt{\frac{\omega}{K}}\, e^{i\frac{\pi}{4}} = \pm\sqrt{\frac{\omega}{K}}\,\frac{1+i}{\sqrt{2}}$

$$\boxed{\underline{r} = \pm\frac{1+i}{\delta}}$$

$$\longrightarrow \underline{f}(z) = A e^{(1+i)\frac{z}{\delta}} + B e^{-(1+i)\frac{z}{\delta}}$$

③ $\underline{\vec{v}}(t) = \left[A e^{z/\delta} e^{i(\omega t + \frac{z}{\delta})} + B e^{-z/\delta} e^{i(\omega t - \frac{z}{\delta})}\right]\vec{u_x}$

$$\boxed{\vec{v}(z,t) = \left[A e^{z/\delta}\cos\left(\omega t + \frac{z}{\delta}\right) + B e^{-z/\delta}\cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\right]\vec{u_x}}$$

δ en mètres car z/δ adimensionné

$\delta \equiv$ long. caractéristique d'évol° du chp $\vec{v}$ selon $\vec{u_z}$.

B-24 bis

② (+1) "le t. pd" considéré comme $\sim\infty$ par énoncé. Or pd $z \to +\infty$, terme $Ae^{z/\delta}$ diverge $\Rightarrow$ $A = 0$ car v ne peut pas diverger

En $z=0$: $\vec{v}(z=0,t) = \vec{V}_{plaque}$ car fluide collé à la paroi par viscosité

$\Longrightarrow B\cos(\omega t) = V_0\cos(\omega t)\ \forall t \Rightarrow \boxed{B = V_0}$

d'où $\boxed{\vec{v}(z,t) = V_0 e^{-z/\delta}\cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)\vec{u_x}}$

atténuée exponentiell^t $\longleftarrow$ (onde progressive harm^{que} selon $+\vec{u_z}$.

$\hookrightarrow$ pr $\underline{z = 9\delta}$, fluide est immobile

Clc° : fluide en mvt seul^t dans une épaisseur proche plaque

"épaisseur de peau"

B.25 ②

$\eta = 10^{-3}$ Pl

$$\delta = \left(\frac{2\times 10^3 \times 10^{-3}}{2\times 2\pi\times 10^3}\right)^{1/2} = 1{,}3\ \text{cm}$$

B.26 ②

$$\delta \simeq \left(\frac{2\cdot 10^{-2}}{2\times 10}\right)^{1/2} = 3\ \text{cm}$$

ondes visqueuses ne se propagent pas dans le manteau.