

DS 5 partie 1 – Résolution de problème (30/01/2016 – 30 min)**Résolution de problème : *Energie des éclairs (extrait E3A PSI 2015)***

Document 1. *Panorama de la physique*, Édition Belin, 2007 :

On est souvent étonné d'apprendre l'existence d'un champ électrique permanent dans l'atmosphère. Entre la haute atmosphère, vers 50 km, et la surface terrestre, la différence de potentiel est de 300 kV. [...] Quel est le générateur capable de maintenir 300 kV entre la surface et l'électrosphère malgré [l'existence d'un] courant de fuite ? Il a fallu attendre 1920 pour que C.T.R Wilson, prix Nobel de physique, l'identifie. Il s'agit des nuages, très développés pendant un orage, les cumulonimbus, qui sont chargés positivement dans leur partie haute et froide, et négativement dans leur partie basse et chaude. Ces charges électriques apparaissent en même temps que les chutes de grêle, signe que leur formation est liée à ces précipitations. [...] Lors du développement du nuage, la charge électrique de sa base induit une forte différence de potentiel avec le sol. Dès que [le champ électrique] atteint quelques 300 kV.m^{-1} , valeur inférieure au [champ] de claquage de l'air (2 MV.m^{-1}), une décharge apparaît.

Document 2. *Atmosphère, océan et climat*, Édition Belin, 2007 :

Description d'un cumulonimbus

- Hauteur basse : 400 m à 1 km
- Épaisseur : Plusieurs km
- Composition : liquide et glace
- Précipitations : Forte pluie, parfois grêle
- Aspect : Nuage dense à extension verticale considérable se développant à partir de cumulus congestus. Sa partie supérieure s'étale souvent en forme d'enclume. C'est le nuage d'orage.

Document 3. Donnée issue de *Météo-France* :

Nombre moyen d'impacts de foudre au sol par km^2 et par an : en France intérieure, varie suivant les régions entre 1 et 2.

Document 4. *La vie du rail - Hors série - Le TGV Nord Europe*, 1993 :

Fiche technique du TGV Réseau

- Vitesse maximale en service commercial : 300 km.h^{-1}
- Puissance aux arbres des moteurs de traction sous 25 kV : 8 800 kW
- Puissance aux arbres des moteurs de traction sous 1,5 kV : 3 680 kW
- Puissance unitaire des moteurs de traction : 1 100 kW
- Nombre de moteurs de traction : 8

G1. Combien de temps pourrait-on faire avancer un TGV en récupérant durant un an toute l'énergie issue des éclairs frappant une grande ville française ?

Cette résolution de problème devra présenter de manière claire une démarche scientifique détaillée et basée, d'une part sur les documents fournis, et d'autre part sur les connaissances du candidat. Toute tentative de réponse pertinente, même incomplète, sera prise en compte lors de la notation.

Donnée: $\varepsilon_0 = 8,8 \cdot 10^{-12} \text{ Fm}^{-1}$

Problème 2 : capteur inductif (extrait E3A PSI 2013)

DEUXIEME PARTIE
CAPTEUR DE PROXIMITE A RELUCTANCE VARIABLE

D / ETUDE DU CAPTEUR INDUCTIF

Un capteur inductif permet de mesurer la distance qui le sépare d'un ruban magnétique défilant. Il est assimilable à un circuit magnétique (Figure 4) constitué d'un matériau doux feuilleté en forme de U dont la section est un carré d'aire $S_1 = a^2$. Autour du circuit sont bobinés N enroulements (b) d'un conducteur parcouru par un courant d'intensité I .

La ligne moyenne du circuit magnétique est représentée en pointillés sur le schéma, elle est de longueur ℓ_1 dans le feuilletage ; la perméabilité magnétique du matériau doux vaut $\mu_1 = 500\mu_0$, μ_0 étant la perméabilité magnétique du vide.

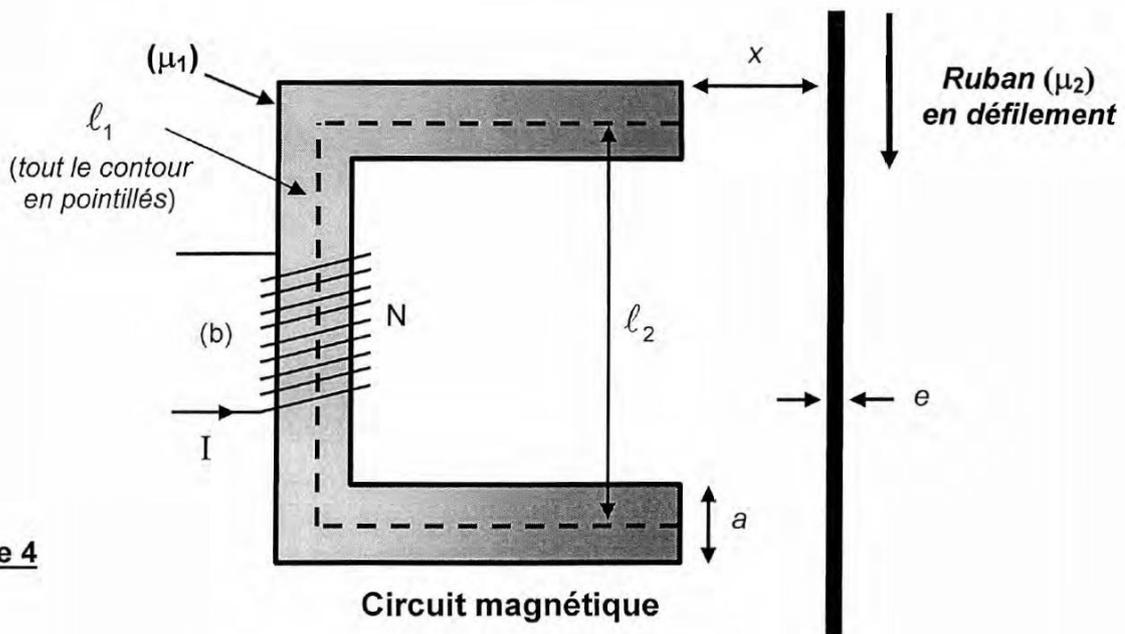


Figure 4

Ce capteur est placé en regard d'un ruban métallique ferromagnétique de largeur supérieure à a . Il est en défilement continu à une distance x devant le capteur ; son épaisseur est notée e et la perméabilité magnétique du matériau constitutif vaut $\mu_2 = 700\mu_0$.

Les lignes de champ sont parfaitement guidées par le circuit magnétique. L'entrefer entre le circuit magnétique et le ruban est suffisamment petit pour pouvoir négliger les fuites de flux magnétique. Les courants induits qui peuvent circuler dans le ruban sont négligés.

La longueur du contour d'Ampère moyen Γ adopté se décompose ainsi : ℓ_1 dans le capteur, $2x$ dans l'air et ℓ_2 dans le ruban. Les valeurs de l'excitation magnétique (respectivement du champ magnétique) seront notées H_1 (respectivement B_1) dans le capteur, H_0 (respectivement B_0) dans l'air et H_2 (respectivement B_2) dans le ruban.

- D1.** Énoncer le théorème d'AMPERE relatif au vecteur excitation magnétique \vec{H} .
- D2.** Appliquer ce théorème le long du contour moyen Γ orienté.
- D3.** Écrire, en justifiant votre raisonnement, le flux Φ du champ magnétique successivement à travers les sections du capteur, du ruban et de l'air. Le champ magnétique est noté respectivement \vec{B}_1 , \vec{B}_2 et \vec{B}_0 pour chacune de ces régions ; a et e sont les longueurs permettant de préciser les surfaces des sections qu'ils traversent.
- D4.** Exprimer les relations liant les excitations magnétiques aux champs magnétiques dans les trois parties du dispositif. Dédurre du théorème d'AMPERE l'expression de l'intensité I en fonction du seul champ B_1 , de N , ℓ_1 , ℓ_2 , a , e , x , μ_0 , μ_1 et μ_2 .
- D5.** Définir un matériau ferromagnétique ; préciser le phénomène qui le caractérise et citer des exemples.
Quelles sont les spécificités d'un matériau ferromagnétique doux feuilleté ?
- D6.** Déterminer le flux magnétique Φ_0 dans la bobine (b). En déduire l'expression de l'inductance L de cette bobine en fonction du champ magnétique B_1 , de N , a et I .
Exprimer l'inductance $L(x)$ de la bobine pour une distance x entre le capteur et le ruban, en fonction de N , ℓ_1 , ℓ_2 , a , e , x , μ_0 , μ_1 et μ_2 .

La valeur de consigne pour la distance capteur-ruban est fixée égale à x_0 ; toute distance quelconque pourra s'écrire $x = x_0 + \Delta x$.

- D7.** Montrer que l'inductance $L(x)$ de la bobine peut s'écrire, en fonction de l'inductance associée à la distance de consigne $L(x_0) = L_0$ et de l'écart Δx , sous la forme :

$$L(x) = L_0 \left(\frac{1}{1 + A \Delta x} \right).$$

Identifier L_0 , puis écrire A sous la forme : $A = \Psi \left(\frac{\ell_1}{\mu_1} + \frac{2x_0}{\mu_0} + \frac{a \ell_2}{e \mu_2} \right)^{-1}$. Déterminer Ψ .

Les données relatives au capteur : $N = 100$, $\ell_1 = 12 \text{ cm}$, $\ell_2 = 5 \text{ cm}$, $a = 3 \text{ cm}$, $x_0 = 10 \text{ mm}$, $e = 0,1 \text{ mm}$ et $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$, permettent de calculer les grandeurs $L_0 = 0,3 \text{ mH}$ et $A = 50 \text{ m}^{-1}$.

La grandeur définie comme le rapport \mathcal{R} de la somme des courants enlacés NI sur le flux du champ magnétique au travers de la section S d'un tube de champ, porte le nom de réluctance :

$$\mathcal{R} = \frac{N I}{\Phi}.$$

- D8.** Exprimer cette grandeur \mathcal{R} en fonction de ℓ_1 , ℓ_2 , a , e , x , μ_0 , μ_1 et μ_2 , puis en fonction de N et de $L(x)$. Analyser son sens physique par analogie électrique.
Justifier le titre de cette deuxième partie : capteur de proximité à réluctance variable.

Problème 3 : Modélisation d'un câble coaxial (extrait CCP PSI 2011)

Un câble coaxial est formé de deux très bons conducteurs, de même longueur l , l'un entourant l'autre. L'un est un conducteur massif de rayon R_1 , appelé l'âme du conducteur. L'autre est un conducteur cylindrique creux de rayon intérieur R_2 et de rayon extérieur R_3 , appelé la gaine du conducteur. L'espace inter-conducteur comporte un isolant.

On a : $R_1 = 0,25$ mm, $R_2 = 1,25$ mm et $l = 100$ m.

I] Modélisation :

Dans la mesure où les champs électromagnétiques ne pénètrent pas dans les conducteurs parfaits, on assimilera le câble coaxial à deux surfaces parfaitement conductrices, cylindriques, coaxiales. Le conducteur (1) a un rayon R_1 , le conducteur (2) a un rayon R_2 (figure 1). Ces deux conducteurs ont même longueur l . Vu que $l \gg R_2$, on négligera les effets de bord. L'espace entre les conducteurs sera assimilé au vide sauf explicitation contraire.

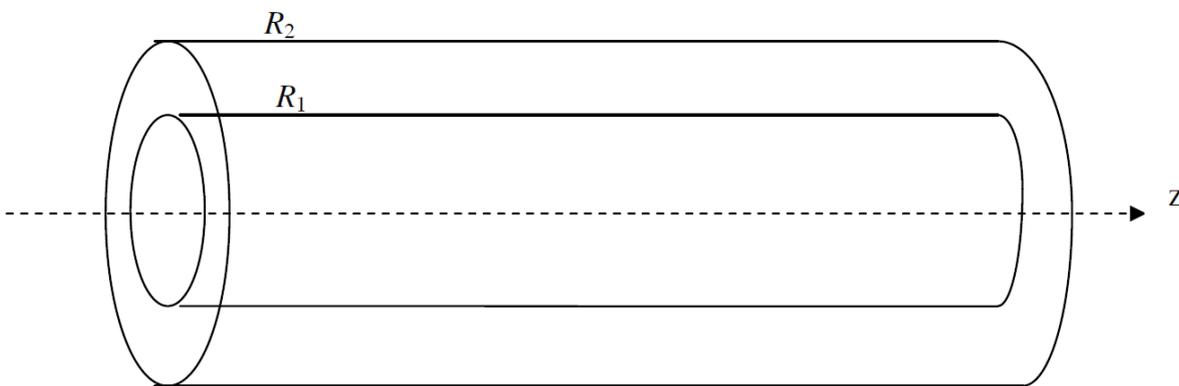


Figure 1 : Portion de câble

On note $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ la base en coordonnées cylindriques.

Aucune connaissance particulière n'est requise pour la détermination de la capacité linéique et de l'inductance linéique du câble.

A] Capacité linéique C :

On suppose ici que les conducteurs intérieur et extérieur portent les charges électrostatiques respectives Q et $-Q$. Elles sont uniformément réparties en surface.

- 1) Justifier par des arguments d'invariance et de symétrie que $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$, dans l'espace inter-conducteur.

- 2) Pour $R_1 < r < R_2$, en utilisant le théorème de Gauss sur une surface que l'on précisera, exprimer $E(r)$ en fonction de l, r, Q et ϵ_0 .
- 3) Les conducteurs (1) et (2) sont portés aux potentiels respectifs V_1 et V_2 , constants. Par un calcul de circulation, exprimer $V_1 - V_2$ en fonction de Q, l, R_1, R_2 et ϵ_0 .
- 4) On définit la capacité C_l du câble de longueur l par $C_l = \frac{Q}{V_1 - V_2}$. Exprimer C_l en fonction de l, R_1, R_2 et ϵ_0 , puis la capacité linéique C du câble coaxial en fonction de R_1, R_2 et ϵ_0 .
- 5) En pratique, l'espace inter-conducteur n'est pas du vide, mais comporte un isolant de permittivité relative $\epsilon_r = 3,1$. On a alors $C = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r}{\ln(\frac{R_2}{R_1})}$.

Déterminer la valeur numérique de C .

B) Inductance linéique L :

On suppose ici que le câble coaxial est alimenté par un générateur de courant continu. Le conducteur intérieur assure le transport du courant aller I_0 , le conducteur extérieur assure le transport du courant retour $-I_0$.

Les répartitions de ces courants sont superficielles et uniformes sur chaque conducteur. Pour le conducteur (1), on a une densité surfacique de courant : $\vec{j}_{s_1} = \frac{I_0}{2\pi R_1} \vec{u}_z$. On note : \vec{j}_{s_2} la densité surfacique de courant sur le conducteur (2).

- 6) Préciser l'expression et l'unité de \vec{j}_{s_2} .
- 7) Il existe entre les deux conducteurs un champ magnétique \vec{B} . Par des arguments d'invariance et de symétrie, justifier que $\vec{B} = B(r)\vec{u}_\theta$.
- 8) Pour $R_1 < r < R_2$, par application du théorème d'Ampère sur un parcours que l'on précisera, exprimer $B(r)$ en fonction I_0, r et μ_0 .
- 9) On note : $w_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$, la densité volumique d'énergie magnétique. Par intégration sur le volume inter-conducteur, exprimer l'énergie magnétique W_m du câble coaxial en fonction de I_0, μ_0, R_1, R_2 et l .
- 10) On rappelle que $W_m = \frac{L_l I_0^2}{2}$. Exprimer l'inductance L_l du câble de longueur l , en fonction de μ_0, R_1, R_2 et de l .
- 11) En déduire l'inductance linéique L du câble coaxial en fonction de μ_0, R_1, R_2 . Déterminer la valeur numérique de L .

Problème 4 : Plaque à induction (extrait CCP TSI 2013)

Un disque conducteur de conductivité σ , d'axe Oz vertical, de rayon b et d'épaisseur e est plongé dans un champ magnétique \vec{B} (figure 6). Ce champ magnétique a les caractéristiques suivantes :

- il est localisé dans un cylindre d'axe vertical Oz de rayon a ;
- il est uniforme dans le cylindre précédent et nul à l'extérieur de ce cylindre ;
- il est dirigé verticalement suivant le vecteur unitaire \vec{e}_z ;
- il varie sinusoïdalement au cours du temps selon la forme : $\vec{B}(t) = B_m \cos(\omega t) \vec{e}_z$, où B_m représente son amplitude et ω sa pulsation.

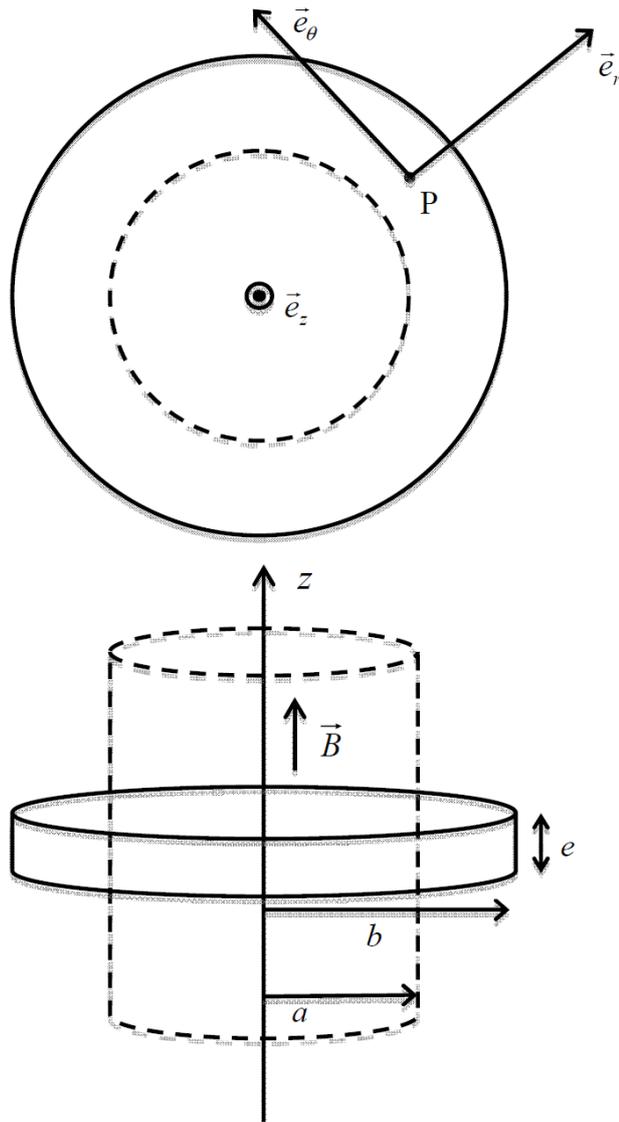


Figure 6 : disque conducteur et champ magnétique

Nous admettons les hypothèses simplificatrices suivantes :

- le disque conducteur étant disposé dans un champ magnétique variable, il sera le siège d'un courant volumique induit \vec{j} ;
- compte-tenu de la symétrie du système, le courant volumique induit est orthoradial et de la forme : $\vec{j} = j(r,t)\vec{e}_\theta$;
- dans les conditions du problème, le champ magnétique induit créé par le courant induit est négligeable devant le champ magnétique extérieur appliqué.

1 – Rappeler la relation liant le vecteur densité volumique de courant \vec{j} au champ électrique \vec{E} dans un conducteur de conductivité σ .

2 – On considère un contour circulaire Γ de rayon r et d'axe Oz . Déterminer la circulation $C(r,t)$ du champ électrique résultant sur ce contour. On exprimera $C(r,t)$ en fonction de r , $j(r,t)$ et σ .

3 – Déterminer l'expression du flux Φ du champ magnétique à travers la surface définie par le contour Γ .

On distinguera très clairement les deux cas où $r < a$ et $a < r < b$.

4 – En appliquant la loi de Faraday, déterminer l'expression du courant volumique induit $j(r,t)$ en fonction de σ , ω , r , a , B_m et t .

On distinguera très clairement les deux cas où $r < a$ et $a < r < b$.

5 – Rappeler l'expression de la puissance volumique dissipée par effet Joule.

6 – En considérant que le disque conducteur est constitué par des couronnes de rayon r , de largeur dr et d'épaisseur e , déterminer l'expression de la puissance totale P_{joule} dissipée par effet Joule dans l'ensemble du disque conducteur puis sa valeur moyenne $\langle P_{joule} \rangle$.

On montrera que $\langle P_{joule} \rangle$ peut se mettre sous la forme $\langle P_{joule} \rangle = A\omega^2 B_m^2$ où A est un coefficient que l'on exprimera en fonction de e , a , b et σ .

On se placera, pour la suite, dans le cas particulier où $a = b$. Dans ce cas, le coefficient A est donné

par l'expression :

$$A = \frac{\pi e \sigma a^4}{16}.$$

7 – Le dispositif précédent est utilisé dans les plaques électriques à induction pour chauffer les casseroles et leur contenu.

Comment peut-on créer, en pratique, le champ magnétique souhaité ?

Citer quelques avantages de ce dispositif de chauffage par rapport aux plaques électriques classiques.

8 – En pratique, le champ magnétique utilisé a une pulsation ω de l'ordre de $2 \times 10^5 \text{ rad.s}^{-1}$ (courant de fréquence f de l'ordre de 30 kHz). Son intensité B_m est de l'ordre de 10^{-4} T .

On considère une plaque à induction de rayon $b = 10 \text{ cm}$ et une casserole dont le fond a le même rayon $a = b = 10 \text{ cm}$, une épaisseur $e = 1,0 \text{ cm}$ et une conductivité $\sigma = 6,0 \times 10^7 \text{ S.m}^{-1}$.

Déterminer l'ordre de grandeur de la puissance moyenne $\langle P_{joule} \rangle$ dissipée dans le fond de la casserole.

Problème 5 : Transformateur torique (extrait Mines-Ponts PSI 2014 : pas difficile)

IV. — Étude d'un transformateur torique

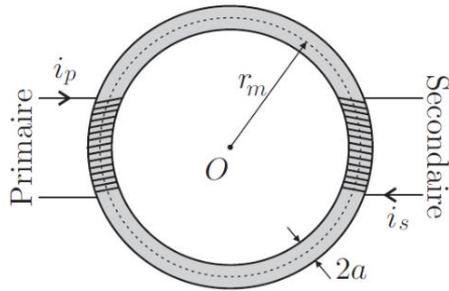


FIGURE 5 – Transformateur

Un transformateur est constitué d'un tore dont la section est un disque de diamètre $2a$ et dont le centre A se déplace sur un cercle de centre O sur l'axe du tore et de rayon r_m (le rayon moyen). Ce tore est réalisé dans un matériau ferromagnétique homogène et isotrope. Le primaire est formé d'un bobinage comportant N_p spires et le secondaire d'un bobinage comportant N_s spires. Ces deux bobinages sont implantés sur deux zones diamétralement opposées du tore.

On suppose que $a \ll r_m$, que les lignes de champ magnétique sont des cercles concentriques, que les normes des champs magnétique B , excitation magnétique H et aimantation M sont uniformes dans le tore. On néglige les résistances des bobinages.

- 19 — Que signifie le terme « ferromagnétique » ?
- 20 — Définir et donner l'allure de la courbe de première aimantation (B en fonction de H). Faire apparaître sur cette courbe le champ magnétique de saturation.

On utilise le transformateur précédent dans le montage de la figure 6 dans lequel l'amplificateur opérationnel est idéal, de gain infini et fonctionne en régime linéaire. On suppose de plus que N_p et N_s sont du même ordre de grandeur et que $i_s \ll i_p$.

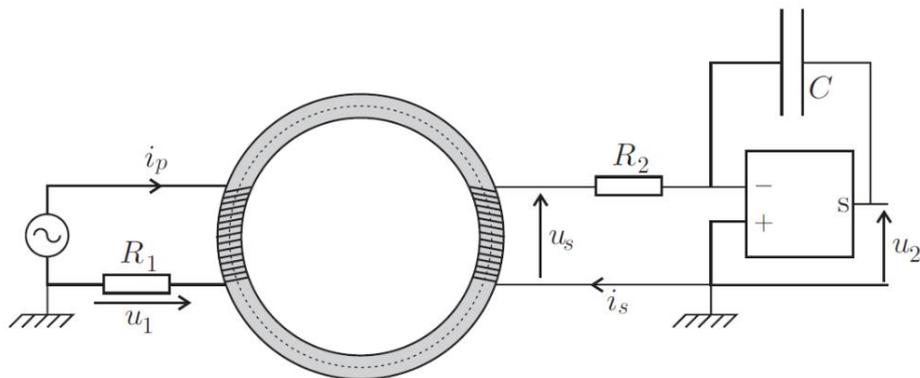


FIGURE 6 – Montage avec transformateur torique

- 21 — Établir les expressions de $H(t)$ et de $B(t)$ en fonction des tensions $u_1(t)$ et $u_2(t)$.
- 22 — On visualise sur l'écran d'un oscilloscope bicourbe en mode XY , la tension u_2 en ordonnée et la tension u_1 en abscisse. Montrer que l'on trace ainsi le cycle d'hystérésis du transformateur.
- 23 — Tracer l'allure d'un tel cycle en faisant apparaître le champ coercitif et le champ rémanent.
- 24 — Montrer que l'aire du cycle donne accès à l'énergie dissipée par hystérésis.

Constantes physiques

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$$

$$\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \text{ F.m}^{-1}$$

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$$

Opérateurs vectoriels en coordonnées cylindriques

$$\text{grad}(U) = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{e}_z$$

$$\text{div}(\vec{a}) = \frac{1}{r} \frac{\partial(r a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(a_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(a_z)}{\partial z}$$

$$\text{rot}(\vec{a}) = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(a_z)}{\partial \theta} - \frac{\partial(a_\theta)}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial(a_r)}{\partial z} - \frac{\partial(a_z)}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(r a_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial(a_r)}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z$$

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

$$\Delta \vec{a} = \left(\Delta a_r - \frac{1}{r^2} (a_r + 2 \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta}) \right) \vec{u}_r + \left(\Delta a_\theta - \frac{1}{r^2} (a_\theta - 2 \frac{\partial a_r}{\partial \theta}) \right) \vec{u}_\theta + (\Delta a_z) \vec{u}_z$$

$$\text{rot}[\text{rot}(\vec{a})] = \text{grad}[\text{div}(\vec{a})] - \Delta \vec{a}$$

Fin de l'énoncé