Transport fluide Chap.1 – Débits, lois de conservation

Intro : L'essentiel a été déjà traité dans le chapitre d'introduction aux phénomènes de transport puisque le transport de masse par un fluide en mouvement avait été pris comme exemple particulier. Nous complétons ici ce chapitre d'introduction avec quelques notions spécifiques à la mécanique des fluides.

1. Description d'un fluide

1.1. Description lagrangienne – Description eulérienne

Deux points de vue sont possibles pour décrire l'écoulement d'un fluide. Si l'on regarde couler une rivière :

- un observateur peut suivre des yeux une feuille à la surface de l'eau (point de vue lagrangien)
- un observateur peut aussi regarder fixement une zone de la rivière et voir passer la feuille quand elle traverse son champ de vue (point de vue eulérien)

Dans les deux cas, on décrit le fluide à l'échelle mésoscopique : système = volume élémentaire de fluide $d\tau$.

Description lagrangienne :

- on découpe le fluide en volumes élémentaires, chacun étant un système *fermé*, donc de masse constante : une ***« particule de fluide »***
- ces particules de fluide sont mobiles ; on associe un observateur à chacune, chargé de la suivre au cours du temps
- les coordonnées d'espace $\vec{R} = [X(t), Y(t), Z(t)]$ représentent la position d'une particule de fluide et sont donc des fonctions du temps
- c'est le même point de vue que la mécanique du point
- on connaît l'écoulement lorsque l'on connaît position $\vec{R}(t)$ et vitesse $\vec{V}(t)$ de chaque particule de fluide

Description eulérienne :

- on découpe le fluide en volumes élémentaires immobiles, chacun est donc un système *ouvert*
- on associe un observateur à chacun de ces volumes, qui regarde ce qui s'y trouve à l'instant t
- les coordonnées d'espace $\vec{r} = [x, y, z]$ représentent la position de chaque volume, et ***ne dépendent donc pas du temps***
- on connaît l'écoulement lorsque l'on connaît *le champ des vitesses* $\vec{v}(\vec{r}, t)$

La description lagrangienne est intuitive, et les lois de la mécanique sont connues dans le cas lagrangien.
La description eulérienne est plus pratique pour décrire les fluides expérimentalement et mathématiquement.
Dans les nouveaux programmes, il n'y a plus de distinction nette à faire entre ces deux descriptions : on pourra « passer » de l'une à l'autre sans trop se poser de questions.

<u>***Définition d'une particule de fluide***</u>
Une ***particule de fluide*** *est un* ***volume élémentaire fermé*** *: c'est un système* ***mésoscopique****.*   *Ca n'a rien à voir avec les molécules constitutives du fluide à l'échelle microscopique.*

1.2. <u>Champ eulérien des vitesses</u>

En utilisant le concept de champ, la description eulérienne peut sembler un peu abstraite. Pour la rendre concrète, il suffit de pouvoir faire le lien entre les deux descriptions, mathématiquement cela donne :

$$\vec{V}(t) = \vec{v}(\vec{R}(t), t)$$

Il suffit d'évaluer le champ des vitesses à l'endroit où se trouve la particule de fluide pour connaître sa vitesse.

<u>Remarque</u> : D'un point de vue mathématique, il doit vous paraître évident que la dérivation temporelle de $\vec{V}(t)$ ne peut pas être égale à celle de $\vec{v}(\vec{r}, t)$. Il n'est pourtant plus au programme de faire la différence entre les deux.

1.3. <u>Trajectoire – Ligne de courant – Tube de courant</u>

<u>***Définition de la trajectoire d'une particule de fluide***</u>
C'est l'ensemble des positions occupées successivement par la particule de fluide au cours du temps.

C'est la même définition qu'en mécanique du point matériel.

<u>***Définition d'une ligne de courant***</u>
<u>Définie à un instant t donné</u>, c'est la courbe tangente en chacun de ses points au champ des vitesses.

Etant données ces deux définitions, il n'y a aucune raison pour que trajectoire et ligne de courant puissent s'identifier. *Ce n'est vrai que dans le cas d'un écoulement stationnaire (i.e. les champs eulériens sont tous indépendants du temps).*

<u>***Définition d'un tube de courant***</u>
<u>Défini à un instant t donné</u>, c'est l'ensemble des lignes de courant qui s'appuient sur un contour fermé.   *D'une certaine manière, cela permet de découper un écoulement en un ensemble de « conduites ».*

2. <u>Débit de masse – Loi de conservation de la masse</u>

2.1. <u>Débit de masse à travers une surface – Vecteur densité de courant associé</u>

- ❖ Rappeler la définition du débit de masse
- ❖ Donner la définition du vecteur densité de courant de masse. Quel autre nom peut-on lui donner ?
- ❖ Donner la relation entre le vecteur densité de courant et la vitesse du fluide

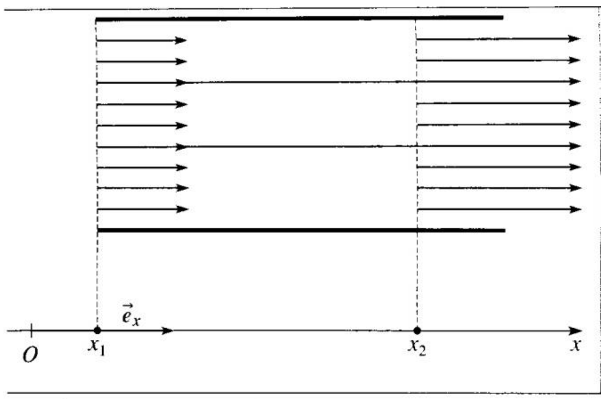
2.2. Loi de conservation de la masse

- L'écrire sous forme intégrale. A quel type de systèmes cette équation s'applique ?
- L'écrire sous forme locale. A quel type de systèmes cette équation fait référence ?

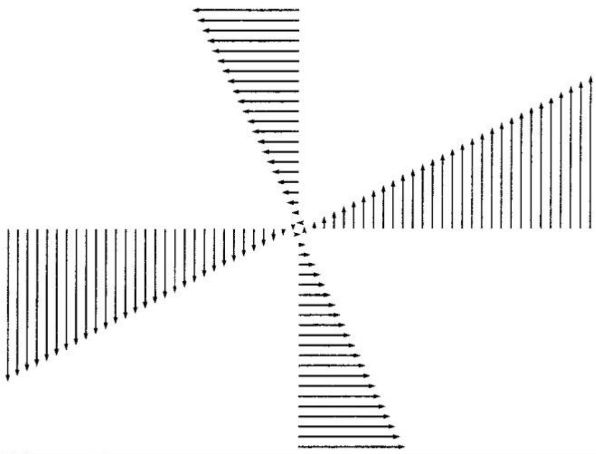
2.3. Ecoulement stationnaire – Conservation du débit de masse à travers un tube de courant

- Définir ce qu'est un écoulement stationnaire
- A l'aide d'un schéma, expliquer ce que signifie « en régime stationnaire, le débit de masse se conserve en toute section d'un tube de courant ». Ecrire la même équation mais sous forme locale.

2.4. Accélération d'une particule de fluide en régime permanent



Doc. 2a. *Simulation d'un écoulement dans une tuyère.*



Doc. 3a. *Visualisation du champ des vitesses d'un écoulement dans l'œil d'une tornade.*

Voici deux cartes de champ de deux écoulements différents *en régime stationnaire*.

- Sur chaque carte de champ, en suivant une particule de fluide pendant son mouvement, en déduire l'allure qualitative du champ des accélérations.

Remarque : En régime stationnaire, le champ eulérien des vitesses est indépendant du temps. Ce n'est pas le cas de la vitesse d'une particule de fluide, comme le montre ces deux exemples. Cette « apparente contradiction » vient du fait qu'il existe deux objets mathématiques différents pour décrire « la vitesse d'un fluide » :

- la vitesse de la particule de fluide $\vec{V}(t)$, comme en mécanique du point (point de vue Lagrangien)
- le champ des vitesses $\vec{v}(\vec{r},t)$ (point de vue eulérien)

La fonction $\vec{V}(t)$ ne dépend que du temps. L'hypothèse stipulant qu'elle ne dépend pas du temps revient à considérer la *statique des fluides*.

La fonction $\vec{v}(\vec{r},t)$ est plus complexe. L'hypothèse d'un régime stationnaire implique que le champ ne dépend que de la position où l'on regarde : $\vec{v}(\vec{r})$. Ce qui ne signifie pas 'statique des fluides', car si le fluide ne s'écoule pas, alors le champ des vitesses serait nul en tout point $\vec{r}$ de l'espace !

Lorsque la particule change de position, et *si elle évolue dans un champ des vitesse* $\boldsymbol{\vec{v}(\vec{r})}$ ***non-uniforme***, alors la vitesse $\vec{V}(t)$ de la particule de fluide change au cours du temps, et son accélération n'est donc pas nulle malgré le régime stationnaire. Voilà comment expliquer l'existence d'une accélération alors que le champ des vitesses est indépendant du temps. Le terme correspondant à cette accélération s'écrit « $\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{grad}\right)\vec{v}$ » et dépend bien de la non-uniformité du champ des vitesses. Ce terme n'est pas à connaître.

Accélération en régime stationnaire
Même en régime stationnaire, une particule de fluide peut accélérer au cours de son mouvement.

Comment calculer l'accélération ?
Deux cas peuvent se présenter :

- en examinant les lignes de champ, on peut montrer que l'accélération est nulle (cas le plus fréquent)
- sinon, vous n'avez pas d'autres moyens que d'écrire $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$, ce qui n'est correct que dans certains cas particuliers ; de toute façon un énoncé ne peut exiger de vous l'expression générale

Remarque : Dans tous les cas classiques traités dans les anciens programmes, ce terme était de toute façon systématiquement nul. C'est normal, il est généralement trop compliqué pour être traité de manière analytique, l'équation différentielle devenant alors non-linéaire à cause de ce terme. Sachez cependant que c'est de ce terme que provient toute la richesse de la mécanique des fluides (notamment les turbulences). Ce terme ne peut être traité que numériquement. Il existe d'ailleurs une application smartphone « WindTunnel » que je vous conseille de télécharger (la version gratuite) : vous pourrez ainsi voir des écoulements simulés incorporant ce terme compliqué.

3. Débit de volume – Ecoulement incompressible

3.1. Débit de volume à travers une surface – Vecteur densité de courant de volume

Définition du débit de volume $\boldsymbol{D_V}$

Le débit de volume est **le volume de fluide qui traverse une surface donnée, par unité de temps** *($m^3 s^{-1}$) :*

$$\boldsymbol{\delta V_{trav} \stackrel{\text{def}}{=} D_V\, dt}$$

Si la surface est orientée, le débit de volume est une grandeur algébrique.
Son signe renseigne alors sur le sens de l'écoulement.
On parle plus fréquemment de ***« débit volumique »*** *(mais appellation trompeuse)*

Remarque : Lorsque le sens de l'écoulement est connu, il est préférable de travailler avec des débits de volume définis positifs (donc d'orienter les surfaces dans le sens de l'écoulement).

Relation entre le débit de volume et le volume transféré pendant une durée finie

Le volume total qui traverse la surface considérée pendant une durée $(t_2 - t_1)$, est donné par :

$$V_{trav} = \int_{t_1}^{t_2} D_V\, dt$$

Expression de D_V en fonction du champ des vitesses sur la surface

Le débit de volume est ***le flux du vecteur $\vec{v}$*** *à travers la surface considérée*

$$\boldsymbol{D_V = \iint_{surface\ S} \vec{v} \cdot \overrightarrow{dS}}$$

Si l'écoulement se fait dans le même sens que le vecteur normal de la surface : $D_V > 0$. Sinon $D_V < 0$.
Le champ des vitesses est la « densité de courant de volume » (« le volume s'écoule avec le fluide »).

3.2. Ecoulement incompressible et homogène : conservation du débit volumique

Définition écoulement incompressible et homogène

Un écoulement est ***incompressible et homogène*** *lorsque le champ de masse volumique est constant et uniforme :*

$$\boldsymbol{\rho(\vec{r},t) = C^{te}}$$

Réalisation concrète d'écoulement incompressible

L'écoulement d'un ***fluide incompressible*** *est incompressible (bonne approximation pour les* ***liquides****).*
L'écoulement d'un ***gaz à une vitesse très inférieure à la vitesse du son ($v \ll c$)*** *dans le gaz est incompressible.*

Ne pas confondre « fluide incompressible » et « écoulement incompressible » !!

- Fluide incompressible : son volume ne varie pas sous l'effet de la pression (ρ uniforme dans un fluide monophasé). Bonne approximation pour les liquides (pas toujours, cf. ondes sonores dans les liquides).

- Ecoulement incompressible : l'écoulement est « suffisamment lent » pour que qu'une perturbation de la pression en un point se répercute quasi-instantanément en tout point du fluide (c'est une ARQS mécanique !). Modèle adapté ***aux gaz dont la vitesse d'écoulement est très faible devant la célérité du son dans le gaz*** (Ex : écoulement d'air autour d'un train, d'une voiture).

Propriété d'un écoulement incompressible et homogène : conservation du débit volumique

En écriture locale (i.e. avec dérivées spatiales) :

$$\boldsymbol{div(\vec{v}) = 0}$$

En écriture intégrale (i.e. sans dérivées spatiales) :

$$\boldsymbol{D_{V_s} = D_{V_e}}$$

ce qui signifie : « A un instant fixé, le débit de volume est le même sur toute section d'un tube de courant »

❖ Démontrer cette affirmation à partir d'une loi de conservation déjà connue

Remarque : l'hypothèse « homogène » n'est pas nécessaire pour la conservation du débit volumique. Un écoulement incompressible inhomogène vérifie aussi la conservation du débit volumique (mais hors programme).

Le bloc 4 étudie le transport de masse dans les fluides en écoulement. Son objectif est d'introduire les grandeurs pertinentes caractérisant un écoulement, en cohérence avec les autres phénomènes de transport. Il ne s'agit pas ici d'établir les équations d'Euler ou de Navier-Stokes, en particulier, l'expression de l'accélération comme la dérivée particulaire de la vitesse est hors programme.

La notion de viscosité est introduite sur un exemple d'écoulement de cisaillement simple. Le nombre de Reynolds est présenté comme le rapport de deux temps caractéristiques construits par analyse dimensionnelle. Il est exploité afin d'évoquer les propriétés de similitude entre des systèmes réalisés à des échelles différentes et caractérisés par les mêmes nombres sans dimension.

Les notions de statique des fluides sont principalement destinées aux étudiants ayant suivi une formation différente de PCSI.

Notions et contenus	Capacités exigibles
4. Fluides en écoulement	
4.1. Débits et lois de conservation	
Particule de fluide.	Définir la particule de fluide comme un système mésoscopique de masse constante.
Champ eulérien des vitesses : vitesse de la particule de fluide.	Distinguer vitesse microscopique et vitesse mésoscopique.
Masse volumique μ, vecteur densité de courant de masse $\mu\boldsymbol{v}$.	Citer des ordres de grandeur des masses volumiques de l'eau et de l'air dans les conditions usuelles.
Débit massique.	Définir le débit massique et l'écrire comme le flux du vecteur $\mu\boldsymbol{v}$ à travers une surface orientée.
Conservation de la masse.	Écrire les équations bilans, globale ou locale, traduisant la conservation de la masse.
Écoulement stationnaire.	Définir un écoulement stationnaire et les notions de ligne de courant et de tube de courant de masse. Exploiter la conservation du débit massique. A partir d'une carte de champ des vitesses en régime stationnaire, décrire qualitativement le champ des accélérations.
Écoulement incompressible et homogène. Débit volumique.	Définir un écoulement incompressible et homogène par un champ de masse volumique constant et uniforme. Relier cette propriété à la conservation du volume pour un système fermé. Définir le débit volumique et l'écrire comme le flux de $\boldsymbol{v}$ à travers une surface orientée. Justifier la conservation du débit volumique le long d'un tube de courant indéformable.

<u>Vidéos DVD mécaflu</u> :

- *Champ des vitesses non-stationnaire*
- *Visualisation ~ particule de fluide*