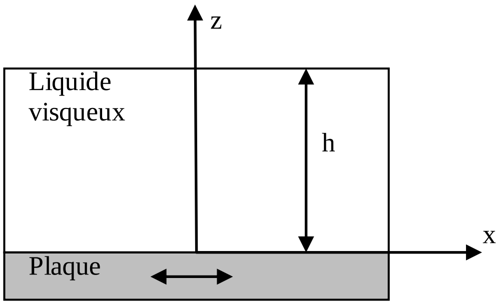
DYNAMIQUE DES FLUIDES VISQUEUX –EXERCICES

1. Effet de peau en mecanique des fluides (CCP PSI 08) :



Considérons une plaque plane, infinie en longueur et largeur, formant le plan xOy . Un fluide visqueux incompressible (par exemple du miel) de viscosité η est déposé sur cette plaque sur une grande épaisseur h. Le fluide occupe alors le demi-espace $z > 0$ (tout se passe comme si l'espace était illimité). La plaque oscille à la pulsation ω , sa vitesse étant $\vec{V}_{plaque} = V_0.\cos(\omega t).\vec{u}_x$. On néglige les phénomènes de pesanteur.

a) En analysant les invariances et symétries du système et en supposant que la vitesse du fluide est parallèle à celle de la plaque, de quelles variables peut dépendre le champ de vitesse ?

b) Montrer que le terme convectif de l'accélération est nul pour ce problème. En déduire alors que la pression dans le fluide est une fonction affine de la cote z et que le champ de vitesses satisfait à l'équation différentielle : $\frac{\partial v}{\partial t} = \nu.\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$ où l'on exprimera ν en fonction de ρ et de η.

c) On cherche une solution pour le champ de vitesse sous la forme $\vec{v} = \underline{f(z)}.e^{i\omega t}.\vec{e}_x$, où $\underline{f(z)}$ est une fonction complexe. En réinjectant dans l'équation différentielle précédente, établir l'équation différentielle vérifiée par $\underline{f(z)}$. Donner la forme générale de $\underline{f(z)}$ *(Indice ci-dessous)* ; on introduira la quantité $\delta = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}$. En déduire l'expression du champ des vitesses, en prenant la partie réelle.

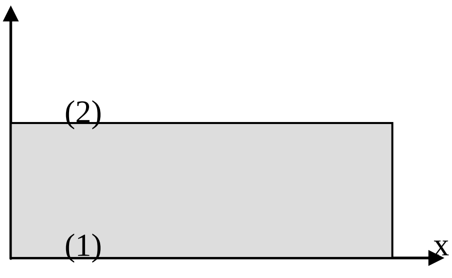
d) En étudiant le comportement aux limites du fluide (vitesse connue en $z = 0$ + le champ des vitesses ne doit pas diverger en $z \to +\infty$), déterminer les constantes d'intégration. Commenter l'expression obtenue.

e) Dans le cas d'un fluide 1000 fois plus visqueux que l'eau (on rappelle que la viscosité de l'eau est de 10^{-3} Pa.s) et pour une fréquence de 2 Hz, calculer la valeur numérique de la distance caractéristique d'atténuation δ en prenant comme masse volumique la masse volumique de l'eau.

e) Les roches en fusion dans le manteau terrestre sont extrêmement visqueuses et ont une masse volumique très grande, si bien que leur viscosité cinématique est de l'orde de $\nu = 10^{-2}$ m².s^{-1} . En déduire une propriété importante pour les ondes sismiques de cisaillement qui ont des fréquences de quelques hertz.

<u>Indice question c)</u> : Posez le polynôme caractéristique en complexe ; puis déterminer les racines complexes en vous rappelant que $i = \exp(\frac{i\pi}{2})$ *et que* $\exp\left(\frac{i\pi}{4}\right) = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$

2. Etude d'une transmission :



Une surface plane (1) d'aire S, entrainée par un moteur, est en translation de vitesse constante $\vec{v}_1 = v_1\vec{u}_x$.

Une surface plane parallèle (2) entraine un mécanisme qui exerce une force résistante constante :

$$\vec{F} = F.\vec{u}_x \quad \text{avec } F < 0$$

L'espace entre les deux plans est rempli par un liquide incompressible de masse volumique ρ et de viscosité η. Leur écartement est e. Les dimensions latérales sont très grandes devant e, et on admet que la vitesse ne dépend que de y et varie linéairement avec y (écoulement de « Couette plan »).

a) Déterminer, en régime permanent, la vitesse v_2 de la plaque (2).

b) P_1 représentant la puissance fournie par la plaque (1) au fluide, et P_2 la puissance fournie par le fluide à la plaque (2), définir et calculer le rendement énergétique de la transmission.

c) Déterminer la force F pour laquelle le rendement est de 90 %.

Données : $\nu = 1.3.10^{-4}$ m^2.s^{-1} ; $\rho = 900$ kg.m^{-3} ; $v_1 = 10$ m.s^{-1} ; F = -0.47 N ; S = 100 cm^2 ; e = 3,6 mm.

Réponses : F = 0,325 N.

3. Equation de Navier-Stokes adimensionnée :

On considère un écoulement de masse volumique ρ,de viscosité η, de vitesse caractéristique U, variant sur une dimension caractéristique L. Seules les forces de pression et de viscosité sont prises en compte.

a) Former à l'aide des grandeurs U, L et ρ un temps caractéristique τ et une pression caractéristique P.

b) On définit les grandeurs adimensionnées $v^* = v/U$, $x^* = x/L$, $t^* = t / \tau$ et $p^* = p/P$.

Montrer que l'équation de Navier-Stokes adimensionnée s'écrit :

$$(\vec{v}^*.\overrightarrow{\text{grad}}^*)\vec{v}^* + \frac{\partial \vec{v}^*}{\partial t^*} = \vec{\nabla}^* p^* + K.\Delta^* \vec{v}^*$$

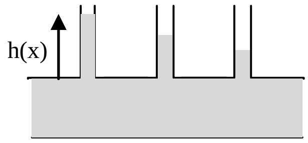
où K est une constante à définir. De quel unique facteur dépend la solution de l'équation ?

c) On étudie un avion de longueur L destiné à voler à vitesse U dans l'air. Une maquette de cet avion à l'échelle 1/10$^{\text{ème}}$ est étudiée dans une soufflerie à air. Quelle doit être, en fonction de U, la vitesse de l'écoulement ?

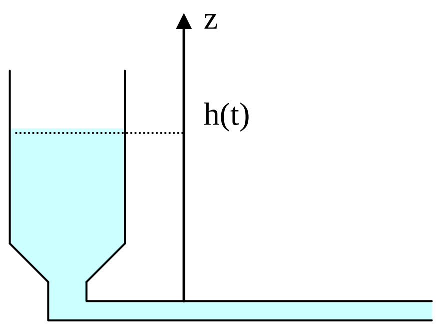
d) Au lieu d'une soufflerie à air, on utilise une veine liquide (tunnel à écoulement d'eau). Quelle vitesse doit avoir l'eau pour simuler la réalité ?

Données : $\eta_{air} = 1{,}8.10^{-5}$Pl ; $\eta_{eau} = 1{,}0.10^{-3}$Pl.

4. Perte de charge dans une canalisation :



On considère un écoulement de Poiseuille plan, dans lequel le plan supérieur est raccordé à de petits tubes verticaux ouverts sur l'air ambiant (pression P°). On admet que la présence des tubes ne perturbe pas l'écoulement. En régime permanent, la hauteur de fluide h(x) dans chaque tube est constante. Montrer que h(x) est une fonction linéaire de x.



5. Viscosimètre à écoulement :

Un liquide visqueux considéré comme incompressible s'écoule lentement d'un récipient cylindrique de diamètre D dans un tube horizontal de diamètre d et de longueur L.

a) Pourquoi peut-on considérer l'écoulement dans le récipient comme quasi-stationnaire ? En déduire l'expression du débit volumique D_v en fonction de h, en utilisant la loi de Poiseuille.

b) A partir de l'équation de conservation de la masse, établir une équation différentielle satisfaite par h(t), et la résoudre pour la condition initiale $h(t_0) = h_0$.

c) Il faut 59 minutes pour que le niveau du liquide passe de h = 6 cm à h = 3 cm. Déterminer la viscosité cinématique du fluide.

Données : D = 4 cm ; L = 50 cm ; d = 1 mm ; g = 10m.s^{-2}.

Réponse : $dh/dt + h/\tau = 0$ avec $\tau = D^2L\nu / gd^4$; $\nu = 2.10^{-6}$ m^2.s^{-1}.