DM2 – Mécanique des fluides (à rendre le 05/10)

***Problème 1* : extrait concours E3A**

Ce problème est consacré au **mouvement d'un glacier**. Il comporte trois parties indépendantes : l'**écoulement d'une couche de miel** sur un plan incliné **puis celui d'une masse glaciaire** sur un flanc de montagne.

ECOULEMENT D'UN GLACIER

Un glacier est une masse de glace qui se forme par le tassement de couches de neige accumulées ; écrasée sous son propre poids, la neige expulse l'air qu'elle contient, se soude en une masse compacte et se transforme en glace.

Du fait de sa plasticité, un glacier s'écoule lentement sous l'effet de la gravité le long d'une pente avec une vitesse d'écoulement très variable selon la pente, la topographie du lit rocheux ou l'épaisseur de la glace. Sa vitesse moyenne est de l'ordre de quelques centimètres à quelques dizaines de centimètres par jour, le record revenant au glacier Kangerdlugssuaq dans le Groenland où la vitesse moyenne atteinte est de 14 kilomètres par an.

A / ETUDE PRELIMINAIRE (ECOULEMENT D'UNE COUCHE DE MIEL)

En préambule à l'étude d'un glacier, intéressons nous à l'écoulement d'un fluide visqueux , par exemple une couche de miel, sur une plaque plane inclinée.

Une couche d'épaisseur constante h, d'un fluide visqueux newtonien incompressible, de viscosité dynamique η et de masse volumique ρ, s'écoule dans le champ de pesanteur supposé uniforme, sur un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale (Figure 1).

La viscosité cinématique est définie comme le rapport $\nu = \eta/\rho$.

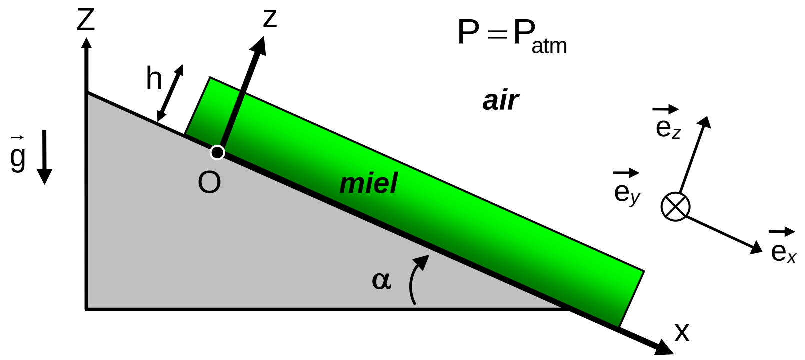

Figure 1

Le support plan incliné a pour équation $z = 0$ et la surface libre correspond à $z = h$. Les forces de viscosité exercées par l'air sur la surface supérieure de la couche de miel sont négligées. A l'interface air–miel, la pression est uniforme et égale à la pression atmosphérique. Les dimensions du système dans les directions Ox et Oy sont très supérieures à l'épaisseur h de la couche de miel.

Hypothèse : l'écoulement est réalisé en régime permanent.

A1. Préciser l'orientation des lignes de courant dans la couche de miel.

A2. Montrer qu'en écoulement stationnaire unidirectionnel, le champ de vitesses s'écrit sous la forme : $\vec{v}(M) = v(z)\,\vec{e}_x$.

A3. Dans les conditions qui viennent d'être décrites, simplifier l'équation générale de NAVIER-STOKES : $\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, P + \rho\, \vec{g} + \eta\, \overrightarrow{\Delta v}$. *(D désigne la dérivée particulaire)*

A4. Projeter l'équation locale de la dynamique qui en résulte sur la base $\left(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\right)$.

En déduire les expressions des composantes du vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}\, P$ sur cette base.

A5. Justifier que la répartition de pression dans le miel s'écrit $P = P(z)$, puis l'exprimer.

A6. Etablir l'équation différentielle $\frac{d^2v(z)}{dz^2} + k \sin\alpha = 0$ vérifiée par la vitesse v(z) et identifier k.

A la surface libre, sur le plan d'équation $z = h$, la contrainte tangentielle exercée à la surface libre par la couche d'air sur la couche de miel est nulle.

A7. Ecrire, en les justifiant, les conditions aux limites relatives à la vitesse v, en $z = 0$ et à sa dérivée $\frac{dv(z)}{dz}$, en $z = h$.

A8. Résoudre l'équation différentielle et montrer que le profil de vitesse dans la couche de miel vérifie la relation : $v(z) = \beta\, z\left(2h - z\right)$. Identifier β.

Localiser le point où cette vitesse est maximale et préciser l'expression correspondante de la vitesse v_{MAX}. Calculer v_{MAX} sachant que $h = 3{,}0\ \text{mm}$, $\alpha = 10°$, $g = 10\ \text{m.s}^{-2}$ et que, pour le miel, $\rho = 1{,}4.10^3\ \text{kg.m}^{-3}$ et $\eta = 10{,}0\ \text{Pa.s}$.

A9. Représenter le champ des vitesses de cet écoulement, en respectant sa configuration géométrique (figure 1).

La couche de miel possède une largeur W (selon Oy) qui demeure très grande par rapport à l'épaisseur h.

A10. Exprimer le débit volumique Q_V du miel. En déduire la vitesse moyenne $\langle v \rangle$ de l'écoulement et l'exprimer en fonction de v_{MAX}.

A11. Exprimer le nombre de REYNOLDS, écrit comme le rapport de deux termes énergétiques qu'il conviendra de justifier. En déduire son expression littérale puis sa valeur numérique. Qualifier la nature de l'écoulement.

B / DYNAMIQUE D'UN GLACIER

Les mouvements d'un glacier peuvent être modélisés par l'écoulement d'un fluide newtonien extrêmement visqueux. Afin d'adopter une géométrie simple, la vallée glaciaire est assimilée à une canalisation de section rectangulaire en forme de U dont le fond est incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale (Figure 2). La masse de glace occupant cette vallée possède une largeur moyenne a et une épaisseur moyenne h, avec $a = 2h$.

Compte tenu de la géométrie proposée, la nouvelle répartition de la vitesse dans les couches du glacier s'écrit : $\vec{v}(M) = v\left(y,z\right)\vec{e}_x$.

B1. Etablir, à partir des résultats obtenus dans l'étude préliminaire, l'équation différentielle décrivant l'écoulement du glacier en régime permanent.

Afin de simplifier la description de cet écoulement, réalisons les changements de variables suivants : $y = y'\,a$, $z = z'\,a$. Les grandeurs y' et z' sont adimensionnées.

B2. Transformer l'équation différentielle précédente en introduisant une vitesse caractéristique v_0, et en posant $v = v' \, v_0$, de façon à obtenir une équation différentielle adimensionnée en $v'(y', z')$, pouvant s'écrire : $\dfrac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} + \dfrac{\partial^2 v'}{\partial z'^2} + 1 = 0$. Expliciter v_0.

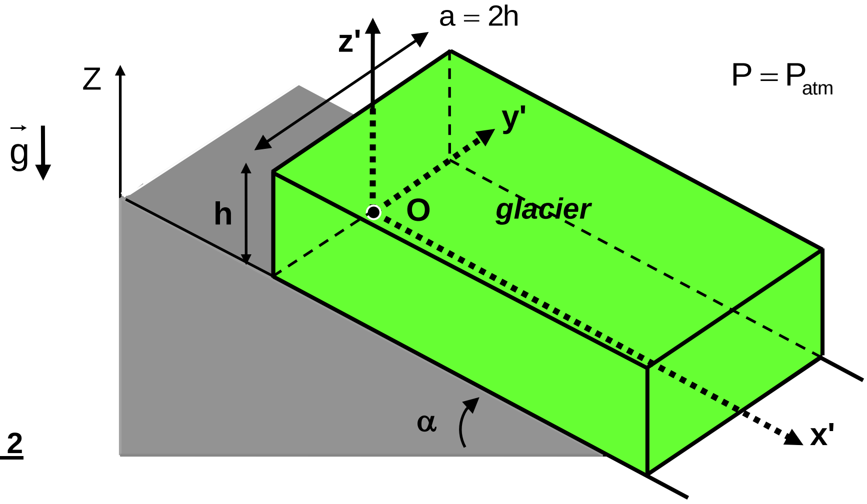

Figure 2

B3. Préciser les conditions aux limites vérifiées par la solution $v'(y', z')$, en $z' = 0$ et $y' = \pm 1/2$, puis par sa dérivée $\dfrac{dv'}{dz'}$, en $z' = 1/2$.

La résolution informatique de cette équation différentielle permet d'obtenir le tracé de v' en fonction de y' (Figure 3) pour différentes valeurs du paramètre z' (compris entre 0 et 1/2).

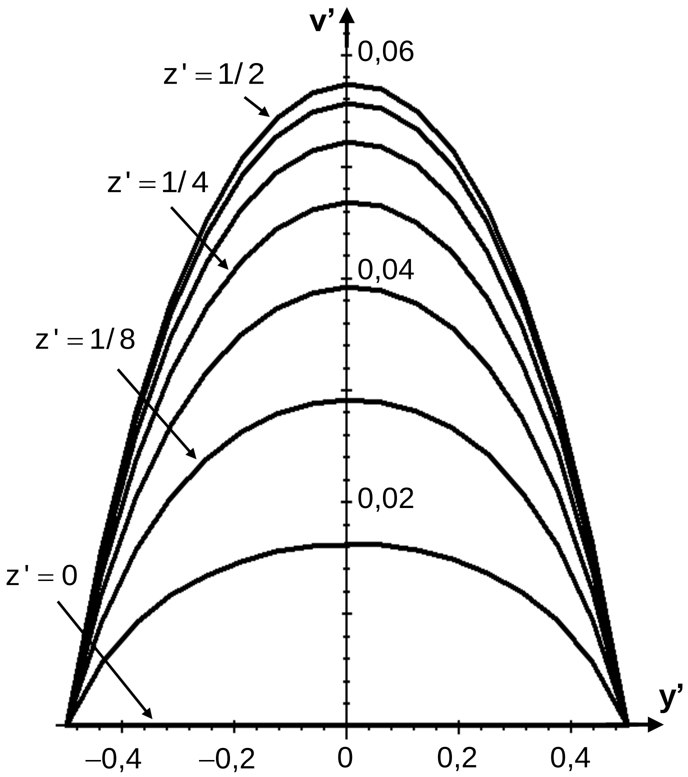

Figure 3

B4. Evaluer la valeur maximale v'_{MAX} atteinte par la vitesse adimensionnée v' à la surface supérieure du glacier.

B5. Combiner ce tracé avec celui réalisé en question A9, dans le plan Oxz afin de représenter, en vue perspective, l'écoulement du glacier en trois dimensions.

De tout temps, les glaciologues ont tenté d'évaluer la déformation des glaciers et leur écoulement (autrefois à l'aide de pierres posées sur le glacier, plus récemment à l'aide de balises GPS et par interférométrie radar, comme étudié en seconde partie).

Etablie pour le glacier du Rhône près du col de la Furka dans le Valais suisse, la figure 4 présente, en superposition à une carte IGN, l'évolution d'une ligne d'environ 50 balises au cours d'une décennie (années référencées A, A+1, … , A+9). A l'instant de référence (année A), les balises sont alignées sur la largeur a du glacier, entre deux moraines latérales.

B6. Estimer le déplacement de la balise centrale sur la durée de 9 années. Calculer la vitesse moyenne de déplacement en $m.an^{-1}$, puis en $m.s^{-1}$.
En déduire la valeur de la vitesse caractéristique v_0.

B7. Déterminer, puis calculer, la viscosité cinématique de la glace. Commenter.

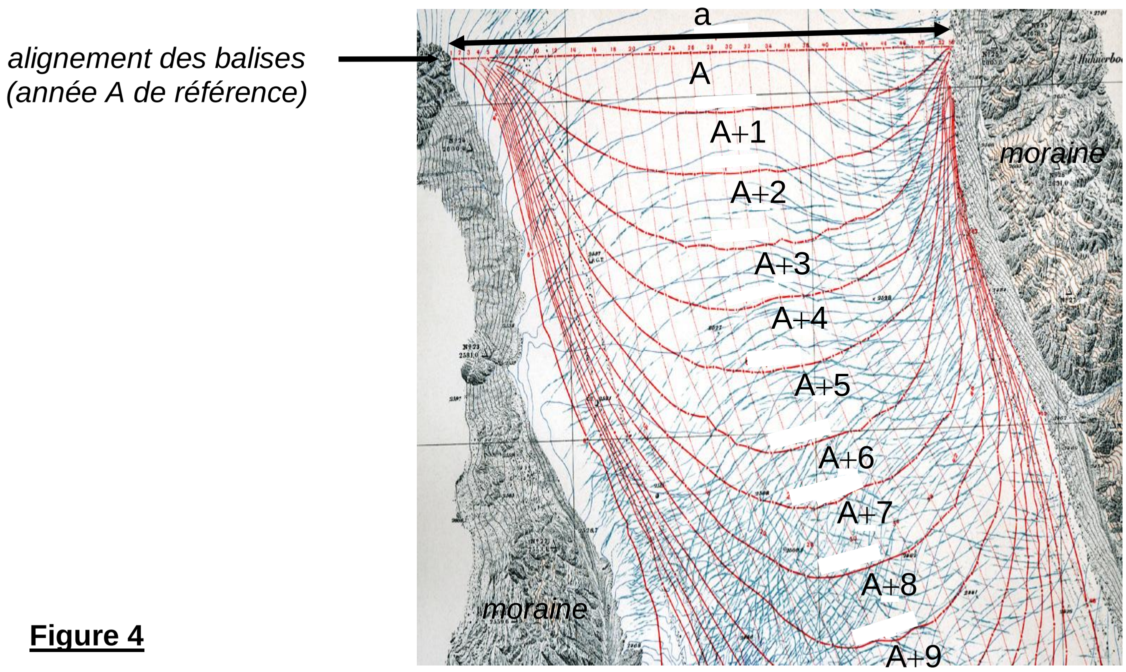

Figure 4

Ecoulement du glacier du Rhône

Données : $a = 2h = 800\ m$, *angle moyen* $\alpha = 14°$ *et* $g = 10\ m.s^{-2}$.

***Problème 2* : Effet de peau en mécanique des fluides (extrait concours CCP)**

Considérons une plaque plane, infinie en longueur et largeur, formant le plan xOy. Un fluide visqueux incompressible (par exemple du miel) de viscosité η est déposé sur cette plaque sur une grande épaisseur h. Le fluide occupe alors le demi-espace $z > 0$ (tout se passe comme si l'espace était illimité). La plaque oscille à la pulsation ω, sa vitesse étant $\vec{V}_{plaque} = V_0 \cos(\omega t)\vec{e}_x$. On néglige les phénomènes de pesanteur.

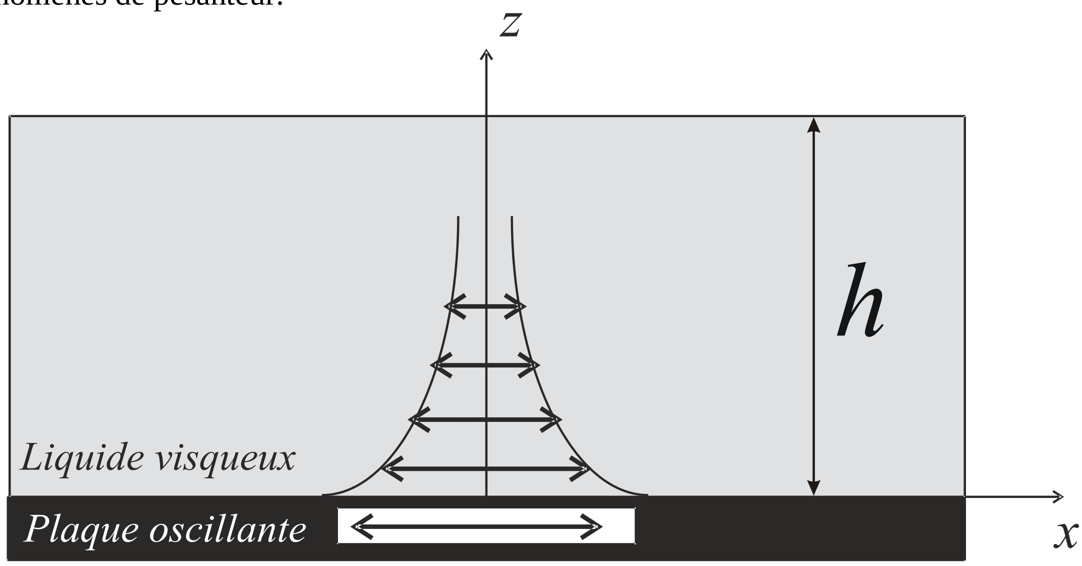

Figure 4 : géométrie de l'écoulement induit

On rappelle l'équation de Navier-Stokes:

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\overrightarrow{grad}\, v^2 + \overrightarrow{rot}\,\vec{v} \wedge \vec{v}\right) = -\overrightarrow{grad}P + \eta \Delta \vec{v}\ .$$

B.22 En analysant les invariances et symétries du système et en supposant que la vitesse du fluide est parallèle à celle de la plaque, de quelles variables peut dépendre le champ de vitesse ?

B.23 Montrer que le terme convectif $\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{grad}\, v^2 + \overrightarrow{rot}\,\vec{v} \wedge \vec{v}\right)$ est nul pour ce problème. En déduire alors que la pression dans le fluide est une fonction affine de la cote z et que le champ de vitesse satisfait à l'équation différentielle suivante $\frac{\partial v}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$ où l'on exprimera ν en fonction de ρ et de η. (pour information, ν est appelée viscosité cinématique).

B.24 On cherche une solution pour le champ de vitesse sous la forme $\vec{v} = \underline{f(z)}.e^{i\omega t}.\vec{e}_x$, où $\underline{f(z)}$ est une fonction complexe. En réinjectant dans l'équation différentielle précédente, établir l'équation différentielle vérifiée par $\underline{f(z)}$. Donner la forme générale de $\underline{f(z)}$ *(Indice ci-dessous)* ; on introduira la quantité $\delta = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}$. En déduire l'expression du champ des vitesses, en prenant la partie réelle.

Indice :   *Posez le polynôme caractéristique en complexe ; puis déterminer les racines complexes en vous rappelant que* $i = \exp(\frac{i\pi}{2})$ *et que* $\exp\left(\frac{i\pi}{4}\right) = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$

B.24bis En étudiant le comportement aux limites du fluide (vitesse connue en $z = 0$; le champ des vitesses ne doit pas diverger en $z \to +\infty$), déterminer les constantes d'intégration. Commenter l'expression obtenue.

B.25 Dans le cas d'un fluide mille fois plus visqueux que l'eau (on rappelle que la viscosité de l'eau est de $10^{-3}\ \mathrm{Pa \cdot s}$) et pour une fréquence de 2 Hz, calculer la valeur numérique de la distance caractéristique d'atténuation δ en prenant comme masse volumique la masse volumique de l'eau.

B.26 Les roches en fusion dans le manteau terrestre sont extrêmement visqueuses et ont une masse volumique très grande, si bien que leur viscosité cinématique ν est de l'ordre de $\nu \approx 10^{-2}\ \mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}$. En déduire une propriété importante pour les ondes sismiques de cisaillement qui ont des fréquences de quelques hertz.