<u>Annexe</u> :
Systèmes de coordonnées, déplacement élémentaire, éléments de surface, élément de volume

1. <u>Définitions préalables</u>

1.1. <u>Distinction entre « les composantes » et « les coordonnées » d'un vecteur</u>

Les ***coordonnées*** d'un vecteur sont les <u>trois nombres permettant</u> de repérer la pointe du vecteur (point M sur les schémas ci-dessous) lorsque celui-ci est tracé à partir de l'origine O du repère :

- $M(x, y, z)$ en cartésien
- $M(r, \theta, z)$ en cylindrique
- $M(r, \theta, \varphi)$ en sphérique

Les ***composantes*** d'un vecteur sont les trois <u>termes de la décomposition du vecteur</u> dans la Base Orthogonale Normée Directe (BOND, my name is…) :

- $\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{u_x} + y\,\overrightarrow{u_y} + z\,\overrightarrow{u_z}$: le système cartésien est le seul pour lequel les projections des composantes (i.e. les coefficients devant les vecteurs unitaires) sont égales aux coordonnées
- $\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{u_r} + z\,\overrightarrow{u_z}$ en cylindrique : l'angle θ est « caché » dans la définition de $\overrightarrow{u_r}$
- $\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{u_r}$ en sphérique : les angles θ et φ sont « cachés » dans la définition de $\overrightarrow{u_r}$

1.2. <u>Définition du déplacement élémentaire</u>

La notion de déplacement élémentaire n'a d'intérêt que lorsque le vecteur repère une position M. Le vecteur $\overrightarrow{dOM}$ est défini comme étant le *déplacement élémentaire* du point *M causé par les variations élémentaires de ses trois coordonnées*. L'expression des composantes de ces vecteur en fonction des variations élémentaires des coordonnées dépend du système de coordonnées.

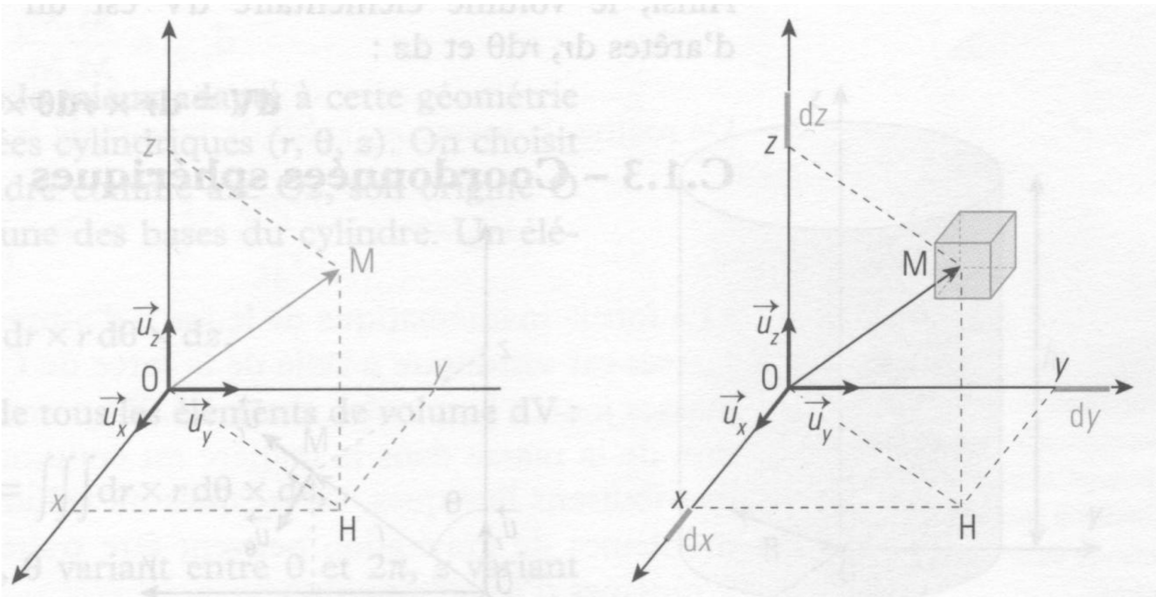
1.3. <u>Surfaces élémentaires et volume élémentaire</u>

Les *variations élémentaires des coordonnées* du point M ne définissent pas uniquement un déplacement élémentaire, mais aussi un volume élémentaire et six surfaces élémentaires.

On voit bien sur les schémas ci-dessous que les variations des coordonnées permettent de dessiner un cube associé : c'est *le volume élémentaire*. Ce cube à 6 faces, qui sont les six *surfaces élémentaires* associées que l'on peut définir.

2. Expressions des quantités élémentaires dans les 3 systèmes de coordonnées

2.1. Coordonnées cartésiennes

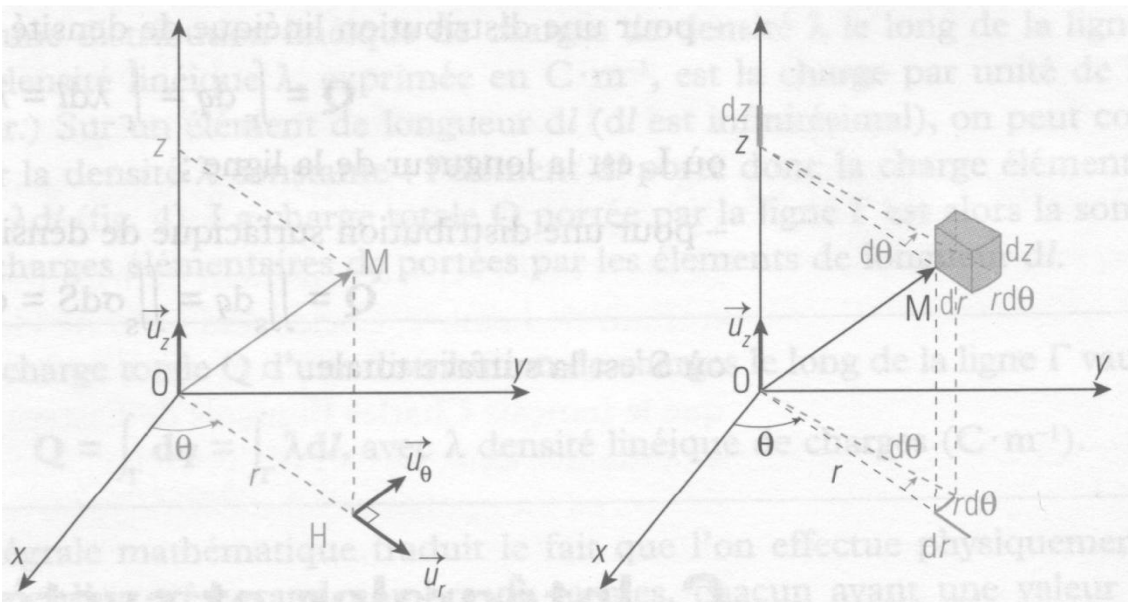


- En vous aidant du dessin, montrer que les trois composantes du déplacement élémentaire sont :

$$\overrightarrow{dOM} = dx\,\overrightarrow{u_x} + dy\,\overrightarrow{u_y} + dz\,\overrightarrow{u_z}$$

- Les surfaces étant des carrés et le volume un cube, en déduire les expressions du volume élémentaire et des six surfaces élémentaires en fonction des composantes dx, dy, dz du déplacement élémentaire

2.2. Coordonnées cylindriques



Contrairement à ce qui est représenté sur le dessin, le volume élémentaire engendré par les variations des coordonnées cylindrique est un CUBE, et ses faces des CARRES. Le dessin représente la courbure des trois composantes du déplacement pour mieux comprendre, mais toutes ces courbes peuvent être assimilées à leur tangente, donc à des droites. En outre, la base étant orthogonale, les trois composantes du déplacement élémentaire sont orthogonales entre elles.

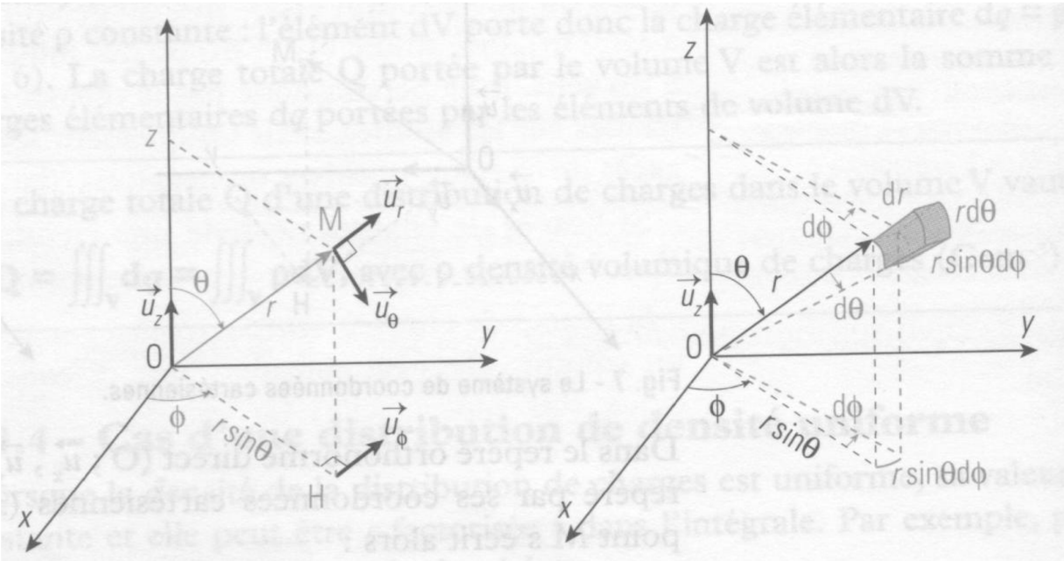
- En vous aidant du dessin, montrer que les trois composantes du déplacement élémentaire sont :

$$\overrightarrow{dOM} = dr\,\overrightarrow{u_r} + rd\theta\,\overrightarrow{u_\theta} + dz\,\overrightarrow{u_z}$$

On notera l'homogénéité de l'expression (tout en mètre)

- Les surfaces étant des carrés et le volume un cube, en déduire les expressions du volume élémentaire et des six surfaces élémentaires en fonction des projections $dx, rd\theta, dz$ du déplacement élémentaire

2.3. Coordonnées sphériques



- En vous aidant du dessin, montrer que les trois composantes du déplacement élémentaire sont :

$$\overrightarrow{dOM} = dr\,\overrightarrow{u_r} + rd\theta\,\overrightarrow{u_\theta} + rsin(\theta)d\varphi\,\overrightarrow{u_z}$$

On notera l'homogénéité de l'expression (tout en mètre)

- Les surfaces étant des carrés et le volume un cube, en déduire les expressions du volume élémentaire et des six surfaces élémentaires en fonction des projections $dx, rd\theta, rsin(\theta)d\varphi$ du déplacement élémentaire