

# Mécaflu – TD1 : Cinématique des fluides

## Exercice 1 : Effet d'un rétrécissement sur un écoulement incompressible (CCP PSI 2012)

Pour se familiariser avec les conséquences d'une propriété très importante de ce type d'écoulements

On considère l'écoulement incompressible d'eau liquide dans un canal rectiligne de section rectangulaire. La base de ce canal se situe dans le plan horizontal  $Oxy$ . Sa hauteur  $h=50\text{cm}$  est constante selon  $z$ . Ce canal subit localement un brusque rétrécissement, sa largeur passe de  $L_1=50\text{cm}$  à  $L_2=2L_1/3=33\text{cm}$ .

La figure 2 représente les lignes de courant de l'écoulement, de part et d'autre du rétrécissement.

On notera que le champ des vitesses est uniforme sur une section de l'écoulement loin en amont du rétrécissement (au niveau du point A par exemple) et loin en aval (au niveau du point C par exemple).

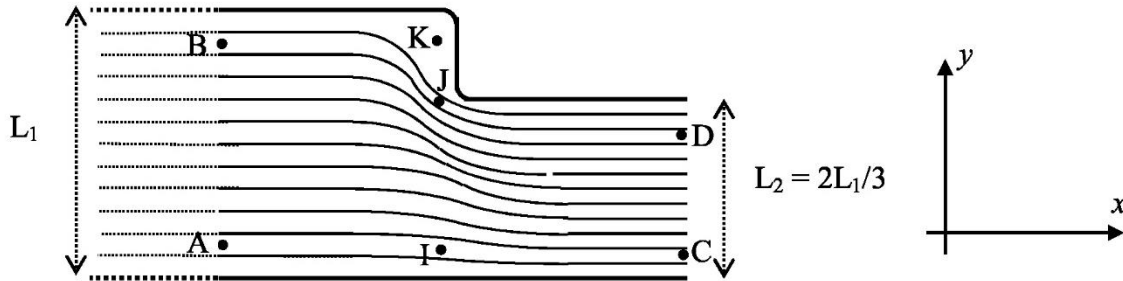


Figure 2

1. Au vu de la figure 2, comparer  $v(J), v(K), v(A)$  et  $v(C)$ .
2. La vitesse  $v(A)$  est de  $0,5\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ . Déterminer le débit volumique dans la canalisation. En déduire la vitesse  $v(C)$ .

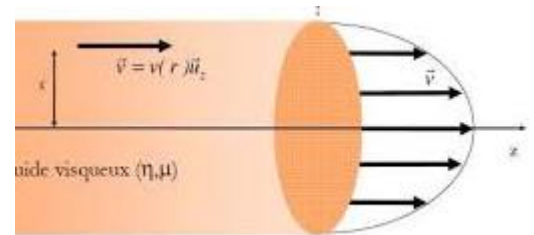
## Exercice 2 : Loi de Poiseuille dans une conduite cylindrique

Pour se souvenir qu'un débit de volume ne se calcule pas toujours par «  $v \times S$  »...

Un liquide de masse volumique  $\rho$ , s'écoule dans une conduite à section circulaire de rayon  $r_0$  et d'axe  $Oz$  avec une vitesse en coordonnées cylindriques de la forme :

$$\vec{v} = v_0 \left( 1 - \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 \right) \vec{u}_z$$

1. L'écoulement est-il stationnaire ?
2. Est-il uniforme sur une section droite de la conduite ?
3. Calculer le débit massique  $D_m$  en fonction de  $\rho$ ,  $v_0$  et  $r_0$ .
4. Quelle est la vitesse moyenne  $U$  du liquide sur une section, définie par :  $U = \frac{1}{S} \iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S}$  ?



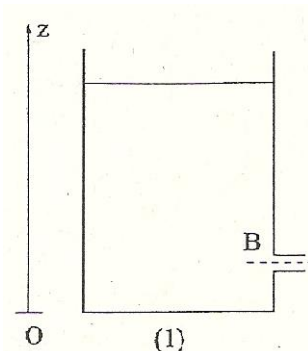
## Exercice 3 : Réservoir d'eau

Pour relier la variation de hauteur d'eau dans un réservoir aux débits entrant et sortant

On notera  $\rho$  la masse volumique de l'eau,  $g$  l'accélération de la pesanteur, et l'on prendra pour valeurs numériques :  $\rho = 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  ;  $g = 9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ .

On considère le réservoir cylindrique dessiné ci-contre, dont la section horizontale est un disque d'aire  $S$ . Ce réservoir est rempli d'eau jusqu'à une certaine hauteur  $z_A = h$ , et percé d'un orifice situé au niveau du point B à hauteur  $z_B$ . Cet orifice possède une section droite  $\sigma$ .

On nomme  $D_s$  le débit volumique d'eau sortant par l'orifice B associé à l'écoulement de vidange du réservoir. La surface libre du réservoir et l'extrémité de l'orifice sont en contact avec l'air. Tous les écoulements considérés sont assimilés à des écoulements homogènes et incompressibles.



On fait l'hypothèse  $\sigma \ll S$  pour toute la suite du problème. Dans ce cadre, on admet momentanément la loi reliant la vitesse de l'eau en B à la vitesse de la surface libre (point A) :  $v_B^2 = 2g(z_A - z_B) + v_A^2$ .

On admettra que le champ des vitesses est uniforme sur une section de l'écoulement, au niveau de la surface libre, ainsi qu'à la sortie du réservoir.

1. Tracer l'allure plausible des lignes de courant associées à l'écoulement, entre la surface libre et le point B. Quelle relation peut-on écrire entre la vitesse de la surface libre  $v_A$ , la vitesse  $v_B$  en B, et les sections  $\sigma$  et S ?
2. Que vaut la vitesse  $v_B$  dans la limite où  $\sigma \ll S$  ?
3. En déduire le débit  $D_s$  en fonction de  $h, z_B, \sigma$ .
4. En appliquant la loi de conservation de la masse à un système ouvert bien choisi, établir l'équation différentielle vérifiée par  $h(t)$ .
5. Résoudre cette équation, et déterminer le temps de vidange.
6. On considère à présent qu'un robinet déverse un débit  $D_e$  constant et connu dans le réservoir. Exprimer la hauteur d'eau  $h_s$  en régime stationnaire.

#### **Exercice 4 : Ecoulement à l'intérieur d'un dièdre droit**

*Un peu de calcul.*

Soit dans la région  $x > 0, y > 0$  l'écoulement défini en eulérien par :

$$\vec{v} = k(-x.\vec{u}_x + y.\vec{u}_y), \quad k \text{ constante positive.}$$

1. Quelle est l'unité de k ?
2. L'écoulement est-il stationnaire ?
3. Schématiser le vecteur vitesse en différents points de l'écoulement.
4. L'écoulement est-il incompressible ?
5. Déterminer le champ d'accélération

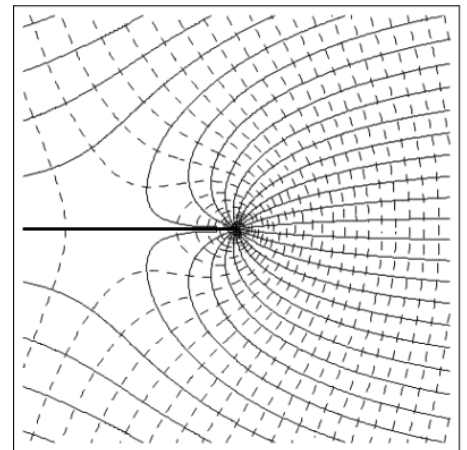
#### **Exercice 5 : Carte de champ d'un écoulement potentiel**

*Pour étudier une carte d'un écoulement potentiel*

On considère la carte ci-contre modélisant un écoulement de liquide, et sur laquelle apparaissent des équipotentiels du potentiel des vitesses et des lignes de courant.

Le trait épais est une paroi rigide.

1. Identifier les lignes de courant et les équipotentiels. Justifier le fait que les équipotentiels sont perpendiculaires aux lignes de vitesse.
2. Est-il possible de savoir dans quel sens s'écoule le fluide ?
3. Identifier les zones de vitesse élevée et de vitesse faible.
4. Comment pourrait-on créer un écoulement possédant ce champ de vitesses ?



#### **Exercice 6 : Expansion d'un fluide**

Un fluide remplit une sphère de manière homogène de rayon  $r_0$  et de centre 0. A l'instant  $t = 0$ , on communique aux particules de fluide une vitesse initiale radiale  $v_{ini}$  qu'elles conservent ensuite. La particule initialement à la distance  $r_{ini}$  du centre 0 acquiert une vitesse  $v_{ini} = \frac{r_{ini}}{\tau}$  (où  $\tau$  est une constante).

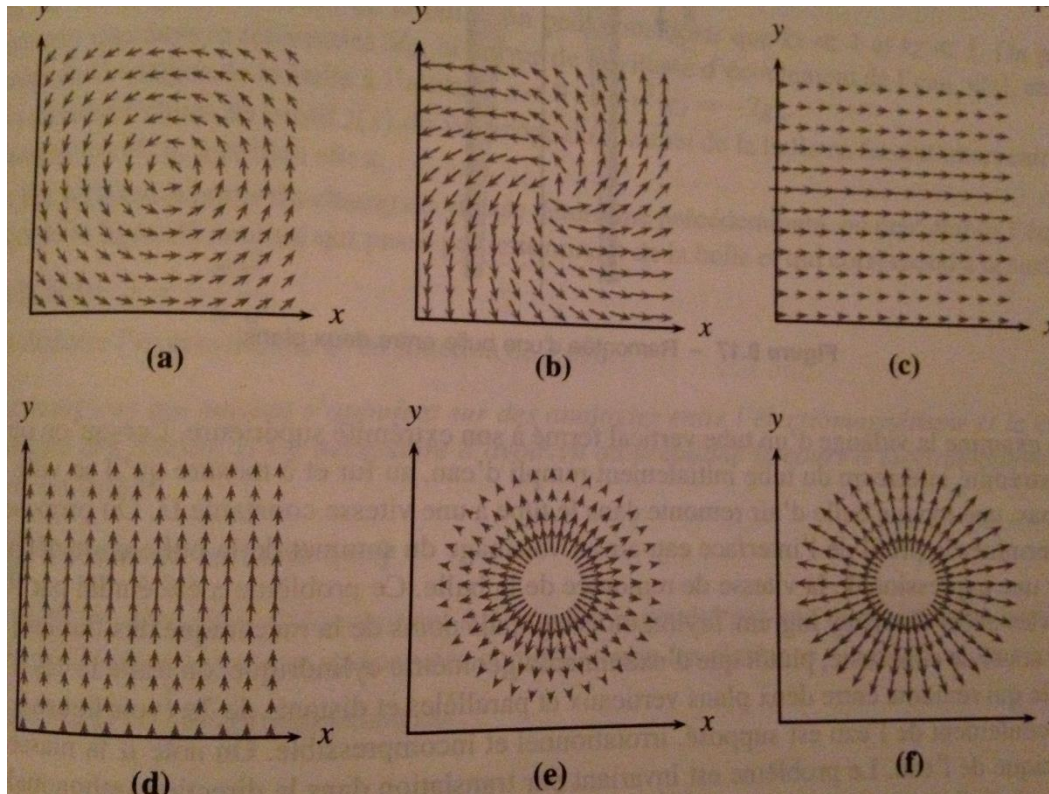
1. Déterminer le champ eulérien des vitesses à un instant t quelconque.
2. L'écoulement est-il stationnaire, incompressible, potentiel ?
3. Obtenir par le calcul le champ des accélérations. Retrouver le résultat sans calcul.
4. On suppose que la répartition de masse est homogène à chaque instant. Déterminer la masse volumique  $\rho(t)$  en fonction de la masse volumique initiale  $\rho_0$  :  
- grâce à l'équation locale de conservation de la masse (utiliser annexe analyse vectorielle)  
- en s'intéressant au volume de la sphère contenant le fluide à un instant quelconque

Réponses :  $\vec{v}(M, t) = \frac{\vec{OM}}{t + \tau}$  ;  $\vec{a}(M, t) = \vec{0}$  ;  $r(t) = \frac{r_0}{(1 + t/\tau)^3}$ .

### Exercice 7 : Caractère tourbillonnaire sur carte de champ

Pour repérer le caractère tourbillonnaire sur des cartes

Les six cartes de champ ci-dessous représentent des écoulements bidimensionnels stationnaires. Ces écoulements sont-ils tourbillonnaires (i.e. au moins une zone telle que  $\overline{\text{rot}}(\vec{v}) \neq \vec{0}$ ) ? Lorsqu'ils le sont, indiquer le sens du vecteur tourbillon.



### Exercice 8 : Autre exemple d'écoulement

Le champ eulérien des vitesses d'un écoulement bidimensionnel est donné en coordonnées cartésiennes par  $\vec{v} = (kx; ky; 0)$ .

1. Cet écoulement est-il stationnaire ? Incompressible ? Tourbillonnaire ?
2. Calculer l'accélération d'une particule de fluide.
3. Représenter l'évolution d'un « carré » de fluide de côté  $a$  entre les instants  $t$  et  $t+dt$ .

### Exercice 9 : Autre exemple d'écoulement

On considère un écoulement plan dépendant du temps caractérisé par un champ de vitesse eulérien :  $\vec{v} = a\vec{e}_x + (bt + c)\vec{e}_y$  où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des constantes.

1. Quelles sont les dimensions de  $a$ ,  $b$  et  $c$  ?
2. L'écoulement est-il compressible ? Rotationnel ?
3. Existe-t-il un potentiel des vitesses ? Si oui, le déterminer en le prenant nul en  $x=y=0$ .
4. Déterminer l'accélération d'une particule de fluide dans ce champ de vitesse.