

Bilans macroscopiques Chap.2 – Bilans de quantité de mouvement et d'énergie cinétique

1. Bilan de quantité de mouvement

- 1.1. Résultante nulle des forces de pression sur une surface fermée si pression uniforme
- 1.2. Force exercée par l'écoulement sur une conduite de section variable
- 1.3. Origine physique de la force de propulsion d'une fusée
- 1.4. Poiseuille cylindrique en régime laminaire

2. Bilan d'énergie cinétique

- 2.1. Dimensionnement du dispositif de propulsion
- 2.2. (Complément) Puissance cinétique d'un jet

Intro :

On aborde ici les bilans de *quantité de mouvement* et d'*énergie cinétique*. Dans le cas de la quantité de mouvement, sauf si une projection s'avère vraiment nécessaire, on gardera les vecteurs tout le long du raisonnement.

1. Bilan de quantité de mouvement

1.1. Résultante nulle des forces de pression sur une surface fermée si pression uniforme

Lorsqu'un système est entouré par un fluide de pression uniforme, la résultante des forces de pression est nulle.

On admet ce résultat. On peut vérifier sur un schéma qu'à chaque force exercée sur une surface élémentaire, on peut trouver une seconde surface élémentaire parallèle à la première et sur laquelle la force sera de même direction et de sens opposé à la première.

1.2. Force exercée par l'écoulement sur une conduite de section variable

Soit un écoulement stationnaire de fluide parfait, incompressible et homogène dans une canalisation à symétrie cylindrique, d'axe Ox, dont la section passe *doucement* de S_1 à S_2 . On néglige la pesanteur. La vitesse du fluide dans la section S_1 est V_1 et sa pression P_1 .

En faisant un bilan de quantité de mouvement sur un système bien choisi, déterminer la force exercée par le fluide sur la canalisation en fonction de S_1 , S_2 , V_1 et P_1 .

$$\text{Réponse : } F = P_1(S_1 - S_2) - \frac{1}{2} \rho V_1^2 S_1 \left(\sqrt{\frac{S_1}{S_2}} - \sqrt{\frac{S_2}{S_1}} \right)^2$$

En prenant des valeurs numériques raisonnables, repérer quel terme est principalement responsable de la force du fluide sur la canalisation.

1.3. Origine physique de la force de propulsion d'une fusée

Hypothèses :

- la fusée éjecte les gaz brûlés avec un débit constant D_m
- la vitesse (en norme) des gaz brûlés est u par rapport à la fusée
- à l'intérieur de la fusée, tout est supposé immobile
- on néglige tout frottement



❖ Quelles sont les forces connues qui agissent sur la fusée ?

Pourtant la fusée monte... L'objectif est d'établir l'expression de l'accélération de la fusée dans le référentiel terrestre, et d'identifier alors l'origine physique de la « force de poussée ». On va montrer que c'est une *pseudo-force* qui apparaît si l'on souhaite « généraliser » le TQM à un système ouvert.

❖ En effectuant un bilan de quantité de mouvement dans le référentiel terrestre galiléen, montrer que l'on peut écrire que le système ouvert {fusée + tout ce qu'elle contient} vérifie une *équation similaire au TQM* dans lequel apparaît un terme homogène à une force : la poussée.

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{ext} + \vec{F}_{pous}$$

1.4. Poiseuille cylindrique en régime laminaire

Il est possible de traiter l'écoulement de Poiseuille cylindrique en régime laminaire à partir d'un bilan de quantité de mouvement. On rappelle que l'écoulement est unidirectionnel et invariant par rotation autour de l'axe du cylindre. L'écoulement est stationnaire, incompressible et homogène. On considère une portion de conduite de longueur L , de rayon R . En amont, la pression vaut P_1 et en aval $P_2 < P_1$. On néglige le poids.

- ❖ Compte-tenu des hypothèses, donner la forme mathématique du champ des vitesses.
- ❖ Définir sur un schéma le système ouvert constitué par le cylindre plein de rayon r de longueur L
- ❖ En procédant à un bilan de quantité de mouvement sur un système fermé bien choisi, montrer que sa quantité de mouvement ne varie pas
- ❖ En déduire l'expression du champ des vitesses

2. Bilan d'énergie cinétique

2.1. Dimensionnement du dispositif de propulsion

On a vu que le système ouvert {fusée + tout ce qu'elle contient} vérifie une équation *similaire* au TQM :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{ext} + \vec{F}_{pous}$$

où $\vec{F}_{pous} = -D_m \vec{u}$, avec \vec{u} la vitesse d'éjection des gaz défini dans le référentiel lié à la fusée.

On souhaite savoir comment dimensionner le dispositif de propulsion (le « moteur » de la fusée), i.e. savoir quelle puissance P_{moteur} celui-ci doit fournir.

❖ En effectuant un bilan d'énergie cinétique, déterminer cette puissance (NB : c'est une puissance intérieure) :

$$P_{moteur} = \frac{1}{2} D_m u^2$$

2.2. (Complément) Puissance cinétique d'un jet

L'objectif d'une éolienne est de convertir *la puissance cinétique* du vent incident en énergie cinétique de rotation, puis en énergie électrique via un alternateur branché sur l'axe de rotation.

- ❖ La puissance cinétique P_{cin} transportée par un fluide étant définie comme un *débit d'énergie cinétique*, proposer une définition mathématique de P_{cin} en fonction de la masse volumique ρ et de la norme v de la vitesse du jet (supposée uniforme sur une section du jet)
- ❖ Interpréter alors le résultat du paragraphe précédent