

## Chap.3 – Régimes transitoires

### 1. Circuit RC série

- 1.1. Observations expérimentales : charge et décharge du condensateur
- 1.2. Etablissement de l'équation différentielle - Circuit du premier ordre
- 1.3. Résolution dans le cas de la charge
- 1.4. Résolution dans le cas de la décharge
- 1.5. Notion de « temps caractéristique »
- 1.6. Echange et stockage d'énergie au cours du régime transitoire
- 1.7. (*Complément*) Réponse à un signal créneau

### 2. Circuit RL série

- 2.1. Etablissement de l'équation différentielle - Circuit du premier ordre
- 2.2. Etablissement du courant
- 2.3. Rupture du courant
- 2.4. Echange et stockage d'énergie au cours du régime transitoire

### 3. Circuit RLC série

- 3.1. Equation différentielle - Circuit du second ordre
- 3.2. Polynôme caractéristique - Les 3 types de régimes transitoires
- 3.3. Décharge du condensateur
- 3.4. Charge du condensateur
- 3.5. Retour sur la notion d'amortissement
- 3.6. Echange et stockage d'énergie au cours du régime transitoire
- 3.7. Décroissement logarithmique (en régime pseudo-périodique)
- 3.8. (*Complément*) Très faibles amortissements : interprétation énergétique de Q

#### Intro :

On s'intéresse dans ce chapitre à un cas particulier de régime transitoire : celui du passage entre deux régimes continus. On se restreint à des circuits simples. On étudie dans un premier temps deux circuits dits du *premier ordre*, les circuits RC et RL série ; puis un circuit du *second ordre*, le circuit RLC série.

On s'attache à établir les *équations différentielles* qui régissent l'évolution des grandeurs électriques de ces circuits, puis à déterminer cette évolution en tenant compte des *conditions initiales*. L'ordre du circuit est donné par l'ordre de l'équation différentielle qui le caractérise.

#### Cadre : Régime transitoire suite à l'application d'un échelon de tension

Un *échelon de tension* correspond au passage *brusque, discontinu*, d'une tension continue à une autre.

Ce sont les effets de l'application d'un tel signal au circuit étudié que l'on va calculer et vérifier expérimentalement. Dans tout le cours, *on fixera si possible l'origine des temps « t = 0 » sur l'échelon.*

Il est clair que l'étude des seuls régimes permanents serait insuffisante. Aucun signal ne saurait exister depuis toujours et durer indéfiniment : tout signal réel a un début et une fin. Il est intéressant de pouvoir évaluer la durée du régime transitoire, caractéristique du système étudié. Du point de vue formel, cette étude est très similaire à celle des oscillations libres d'un système mécanique. Vous verrez en SI que l'on peut identifier en outre certaines caractéristiques d'un système inconnu par l'étude de sa réponse à une entrée en échelon.

# 1. Circuit RC série

## 1.1. Observations expérimentales : charge et décharge du condensateur

On étudie le circuit soumis à un échelon  $[0, E]$  à la charge, et  $[E, 0]$  à la décharge. On remarque une chose importante : après l'échelon de tension, on observe un **régime transitoire** pendant lequel la tension aux bornes de C évolue. *Comme son nom l'indique, ce régime s'atténue rapidement pour laisser place à un régime permanent continu*. La plupart des circuits que l'on verra se comportent de cette façon lorsqu'ils sont soumis à un échelon de tension. Ils sont dits **stables**.

D'autres circuits, dits **instables**, ont un comportement différent : leur réponse à un échelon ne s'atténue pas. Elle diverge par exemple. On en étudiera quelques exemples au dernier chapitre d'électrocinétique, et l'on verra comment distinguer circuits stables et circuits instables.

## 1.2. Etablissement de l'équation différentielle - Circuit du premier ordre

On établit l'équation différentielle (ED) vérifiée par la tension aux bornes du condensateur. Seul le second membre de l'équation diffère selon que l'on considère la charge ou la décharge.

### Méthode :

- Schéma du circuit + orientation des grandeurs électriques
- Déterminer l'ED par application d'une des lois / outils de l'électrocinétique
- Mettre l'ED sous forme canonique (si possible)
- **En régime continu établi**, vérifier la compatibilité entre l'ED et le schéma équivalent du circuit

## 1.3. Résolution dans le cas de la charge

### Méthode :

- Résolution complète de l'ED : solution ESSM, solution particulière
- Déterminer les Ctes d'intégration : les C.I. sont connues à  $t = 0^-$  ... **Les connaît-on à  $t = 0^+$  ?**
- Discussion physique du résultat : temps caractéristique, graphique, signal en régime continu établi

- Déterminer l'évolution de la tension aux bornes du condensateur en résolvant l'ED ; puis celle du courant. Juste avant l'échelon ( $t = 0^-$ ), toutes les tensions et courants sont nuls.

## 1.4. Résolution dans le cas de la décharge

La solution de l'ESSM reste la même, seules la solution particulière et les C.I. diffèrent. On suppose que la tension aux bornes de C est égale à E juste avant l'échelon.

## 1.5. Notion de « temps caractéristique »

Le **temps caractéristique** caractérise la durée du régime transitoire, car on peut dire : « au bout de quelques  $\tau$ , le régime continu est établi, le régime transitoire est fini ». C'est une grandeur intrinsèque du circuit. On retiendra que RC est homogène à un temps.

- Montrer que la tangente à l'origine coupe l'asymptote à  $t = \tau$
- Déterminer le temps de réponse à 90%, à 95%
- Que représente «  $t = 5\tau$  » ?

## 1.6. Echange et stockage d'énergie au cours du régime transitoire

### Méthode :

- Bilan de puissance + *interprétation physique (sens des échanges, et stockages éventuels)*
- Intégration par rapport au temps : énergies échangées au cours du régime transitoire par les dipôles

- Etudier les aspects énergétiques de la charge, puis de la décharge du circuit RC

### *Résultats :*

- Lors de la charge, l'énergie fournie par l'alimentation est partiellement stockée dans le condensateur, et partiellement dissipée par effet Joule
- Le condensateur est récepteur durant la charge, générateur durant la décharge
- Lors de la décharge, l'intégralité de l'énergie stockée dans le condensateur est dissipée par effet Joule

## 1.7. (Complément) Réponse à un signal créneau

Etude graphique qualitative réalisée en comparant la demi-période du créneau avec le temps caractéristique des régimes transitoires successifs. On note ici *l'intérêt de comparer les ordres de grandeur des deux temps caractéristiques impliqués* dans le problème pour comprendre qualitativement le comportement du circuit.

## 2. Circuit RL série

### 2.1. Etablissement de l'équation différentielle - Circuit du premier ordre

On étudie le circuit RL série soumis aux mêmes échelons de tension que le RC précédemment étudié.

- Etablir l'ED régissant l'évolution du courant.

### 2.2. Etablissement du courant

- Déterminer l'évolution du courant en résolvant l'ED ; puis de la tension aux bornes de la bobine.

### 2.3. Rupture du courant

- Déterminer l'évolution du courant ; puis de la tension aux bornes de la bobine.
- Discuter du résultat dans le cas où l'échelon de tension est réalisé en ouvrant un interrupteur placé en série dans le circuit.

### 2.4. Echange et stockage d'énergie au cours du régime transitoire

### *Résultats :*

- Lors de l'établissement du courant, l'énergie fournie par l'alimentation est partiellement stockée dans la bobine, et partiellement dissipée par effet Joule
- Une fois le courant établi, la bobine est équivalente à un fil, et la puissance fournie par le générateur est intégralement reçue par la résistance et dissipée par effet Joule
- La bobine est réceptrice durant l'établissement du courant, génératrice durant la rupture
- Lors de la rupture du courant, l'intégralité de l'énergie emmagasinée dans la bobine est reçue par la résistance et dissipée par effet Joule

### 3. Circuit RLC série

On étudie la réponse du RLC série aux mêmes types d'échelon précédemment. La démarche est la même ; les résultats sont cependant plus riches : *on peut distinguer 3 types de régimes transitoires*.

#### 3.1. Equation différentielle - Circuit du second ordre

L'équation différentielle est d'ordre 2 : le circuit RLC série est un circuit du second ordre.

Trois *écritures canoniques* sont possibles, en introduisant un des trois couples de variables réduites :

- |  |  |
|--|--|
| ○ pulsation propre $\omega_0$ , facteur d'amortissement $\lambda$    | $\frac{d^2 u}{dt^2} + 2\lambda \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 2nd\ membre$           |
| ○ pulsation propre $\omega_0$ , coefficient d'amortissement $\alpha$ | $\frac{d^2 u}{dt^2} + 2\alpha\omega_0 \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 2nd\ membre$    |
| ○ pulsation propre $\omega_0$ , facteur de qualité $Q$               | $\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 2nd\ membre$ |

Dans le cas du RLC série :  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  ;  $\lambda = \frac{R}{2L}$  ;  $\alpha = \frac{\lambda}{\omega_0} = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$   $Q = \frac{1}{2\alpha} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$

L'intérêt de l'écriture canonique est double :

- les paramètres introduits permettent de discuter simplement le type de régime transitoire
- elle facilitera l'analogie avec l'étude des oscillations mécaniques

Le nom des paramètres est à connaître par cœur, pas leur expression en fonction de R, L et C, qu'il faut savoir établir à nouveau si demandé en exercice. Leur expression dépend du circuit considéré : on peut construire un circuit du 2<sup>nd</sup> ordre avec les composants R, L et C tel que ces expressions soient différentes.

#### 3.2. Polynôme caractéristique - Les 3 types de régimes transitoires

La solution de l'ED sans second membre s'obtient en résolvant « l'équation caractéristique » associée. Les trois couples de paramètres peuvent être utilisés pour la résolution. On utilise ici préférentiellement le facteur d'amortissement  $\lambda$ . L'équation caractéristique s'écrit :

$$r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$$

L'expression du discriminant est donc :

$$\Delta = 4(\lambda^2 - \omega_0^2) = 4\omega_0^2(\alpha^2 - 1) = 4\omega_0^2\left(\frac{1}{4Q^2} - 1\right)$$

La solution de l'ESSM, et donc le type de régime transitoire, va dépendre du signe de  $\Delta$  :

- **Régime apériodique** :  $\Delta > 0$  ( $\alpha > 1$ ,  $Q < 1/2$ )  $\Rightarrow$   $u(t) = A \exp(r_1 t) + B \exp(r_2 t)$
- **Régime critique** :  $\Delta = 0$  ( $\alpha = 1$ ,  $Q = 1/2$ )  $\Rightarrow$   $u(t) = (A + Bt) \exp(-\lambda t)$
- **Régime pseudo-périodique** :  $\Delta < 0$  ( $\alpha < 1$ ,  $Q > 1/2$ )  $\Rightarrow$   $u(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \exp(-\lambda t)$   
avec  $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \alpha^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$

Le type de régime transitoire est donc fixé par l'ESSM.

Pour déterminer la solution de l'ED générale, il faut rechercher une solution particulière *puis* déterminer les constantes à partir des conditions initiales. On va se placer dans deux situations particulières : échelon de tension de  $E$  à  $0\text{ V}$  (décharge du condensateur), puis échelon de  $0\text{ V}$  à  $E$  (charge du condensateur).

### 3.3. Décharge du condensateur

On appelle aussi cette situation l'étude en « *régime libre* » du circuit RLC série, du fait de la tension nulle appliquée au circuit, à la suite de l'échelon. Ici, le second membre de l'équation est nul donc l'ED générale s'identifie avec l'ESSM : pas besoin de rechercher de solution particulière.

Il ne reste plus qu'à déterminer les constantes d'intégration : ED 2<sup>e</sup> ordre  $\Leftrightarrow$  2 conditions initiales nécessaires. Les courbes auxquelles il est fait référence dans ce paragraphe ont été tracées pour  $L = 10\text{mH}$  et  $C = 1\mu\text{F}$ . Elles ne diffèrent que par la valeur du coefficient d'amortissement, donc de  $R$ . La valeur de  $E$  est prise à  $5\text{V}$ .

#### Régime apériodique (Fig. 1)

- Somme d'exponentielles décroissantes, absence d'oscillations
- Régime permanent atteint d'autant plus rapidement que l'amortissement est grand
- Caractéristiques à repérer : à  $t = 0$ , point d'inflexion, limite en régime permanent
- Vérifier que le régime permanent est compatible avec la valeur attendue

#### Régime critique (Fig. 1)

- Pas d'oscillations, ne diffère pas qualitativement du régime apériodique
- Situation dans laquelle le régime permanent est atteint le plus rapidement
- Que peut-on dire de ce régime d'un point de vue expérimental ?

#### Régime pseudo-périodique (Fig. 2)

- La tension oscille autour de la valeur finale
- La pseudo-fréquence d'oscillation diminue avec l'amortissement
- La pseudo-fréquence est *toujours* inférieure à la fréquence propre
- Décroissance exponentielle de l'amplitude des oscillations (enveloppe représentée)
- L'amortissement des oscillations est d'autant plus faible que le coefficient d'amortissement est faible. Les oscillations sont de « meilleure qualité » quand le facteur de qualité est grand
- Le cas d'un amortissement nul est aussi représenté : on obtient une sinusoïde, de période égale à la période propre. Le circuit LC est un *oscillateur harmonique*.

La *figure 3* superpose les trois types de solution pour synthétiser les différences de comportement des trois régimes transitoires possibles pour le circuit RLC série en régime libre.

### 3.4. Charge du condensateur

La *figure 4* regroupe les trois types de réponse du circuit à un échelon de tension. Les caractéristiques des courbes sont les mêmes qu'en régime libre, seules les conditions initiales et la valeur finale diffèrent.

### 3.5. Retour sur la notion d'amortissement

L'amortissement est une notion clef dans l'étude des régimes transitoires. C'est une **grandeur intrinsèque au circuit** étudié, et qui détermine à elle seule le type de régime transitoire. L'évolution particulière du circuit est alors fixée par « l'excitation » (l'échelon de tension dans notre cas). Ainsi, bien que l'on n'ait étudié que deux cas particuliers d'échelon de tension, tous les résultats physiques que l'on a obtenus se généralisent à tous les types d'échelon de tension appliqués au circuit RLC série.

On notera que l'existence d'un régime transitoire correspond à une valeur non nulle de l'amortissement, donc de  $R$ . Si l'amortissement est nul ( $R = 0$ ), le régime transitoire n'existe pas, mais est remplacé par un régime permanent sinusoïdal : le circuit est instable. Le circuit LC est un oscillateur harmonique, et le nom de « pulsation propre » donné au paramètre  $\omega_0$  prend alors tout son sens.

Lorsque l'on fera le parallèle entre la présente étude et les oscillations mécaniques, on mettra en évidence une forte analogie entre résistance électrique et frottements fluides.

Un fort amortissement implique un régime apériodique ; un faible amortissement un régime pseudo-périodique. Le régime critique n'est qu'une frontière entre ces deux comportements. On peut à ce titre définir *une résistance critique*, dont la valeur délimite le passage d'un régime à l'autre, L et C étant fixés.

### 3.6. Echange et stockage d'énergie au cours du régime transitoire

*Résultats :*

- Lors de la charge, l'énergie fournie par l'alimentation est partiellement stockée dans le condensateur, et partiellement dissipée par effet Joule, comme dans le cas du circuit RC. L'énergie magnétique stockée par la bobine est nulle à l'état initial et à l'état final, et non nulle durant le régime transitoire
- En régime libre, l'intégralité de l'énergie stockée initialement dans C est dissipée par effet Joule
- Régimes apériodique et critique :
  - C est récepteur durant la charge, générateur durant la décharge
  - L est réceptrice, puis génératrice dans les deux cas (charge et décharge)
- Cas particulier du régime pseudo-périodique :
  - on note des échanges périodiques d'énergie entre L et C
  - L et C sont donc alternativement récepteur et générateur

### 3.7. Décrément logarithmique (en régime pseudo-périodique)

C'est un paramètre qui quantifie la vitesse de décroissance exponentielle de l'amplitude des oscillations. Lorsque la valeur finale de la tension  $u(t)$  est nulle, on définit le décrément logarithmique comme ceci :

$$\delta \stackrel{\text{def}}{=} \ln \left( \frac{u(t + nT)}{u(t + (n + 1)T)} \right)$$

Il est intéressant pour mesurer expérimentalement le coefficient d'amortissement  $\alpha$ , car :

$$\delta = \alpha \omega_0 T = \frac{2\pi\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}$$

- Définir le décrément logarithmique dans le cas où la valeur finale de  $u(t)$  est  $E$ .

### 3.8. (Complément) Très faibles amortissements : interprétation énergétique de Q

On se place dans le cas d'un circuit RLC série *très faiblement amorti* :  $\alpha \ll 1$ ,  $Q \gg 1$ .

- Montrer que l'énergie totale emmagasinée décroît exponentiellement avec le temps (*Fig. 5*)
- Montrer que la variation relative de l'énergie totale  $\frac{\Delta E}{E}$  sur *une pseudo-période* s'exprime à partir de  $Q$  :

$$\frac{\Delta E}{E} \approx \frac{2\pi}{Q}$$

# Notions clefs

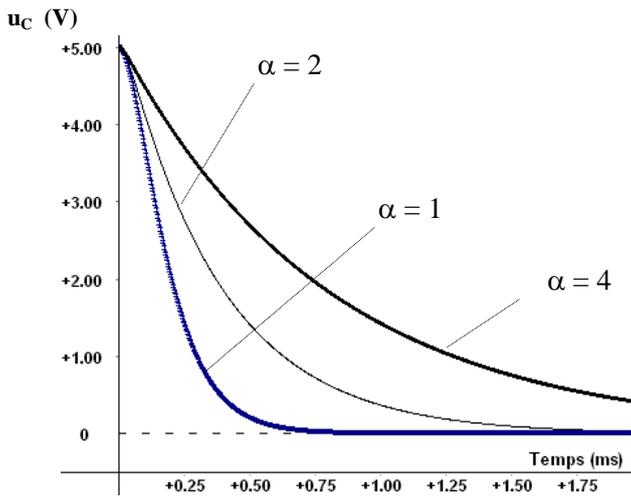
## Savoirs :

- Toutes les définitions
- Ecriture canonique des équations différentielles (1<sup>er</sup> et 2<sup>nd</sup> ordre)
- Expression des temps caractéristiques (RC et RL série). Connaître leur signification physique.
- Nom des variables réduites pour un 2<sup>nd</sup> ordre. Connaître leur signification physique.
- Les trois types de régime transitoire (circuits du 2<sup>nd</sup> ordre) :
  - la forme mathématique des solutions
  - les principales caractéristiques des trois régimes
  - le rôle de l'amortissement

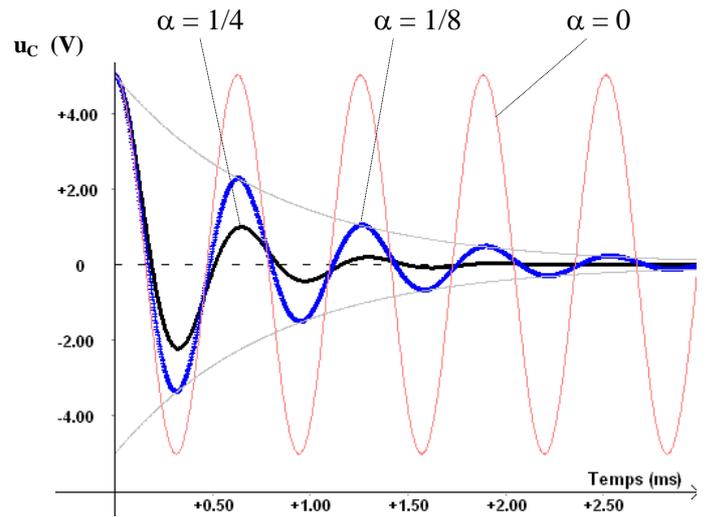
## Savoirs faire :

- Etablir l'équation différentielle qui régit l'évolution de la grandeur considérée
- Résoudre complètement une ED du 1<sup>er</sup> et du 2<sup>nd</sup> ordre
- *Utiliser la continuité de  $u_c(t)$  et  $i_L(t)$  pour connaître les conditions initiales à  $t = 0^+$*
- Tracer l'allure des courbes
- Discuter physiquement le résultat
- Etablir un bilan de puissance, et interpréter les différents termes (échanges d'énergie etc...)

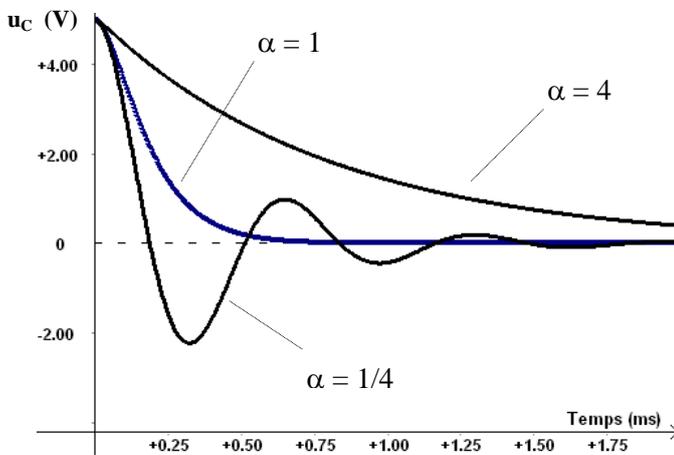
# Courbes tracées avec Synchronie ( $L = 10\text{mH}$ , $C = 1\mu\text{F}$ , $E = 5\text{V}$ )



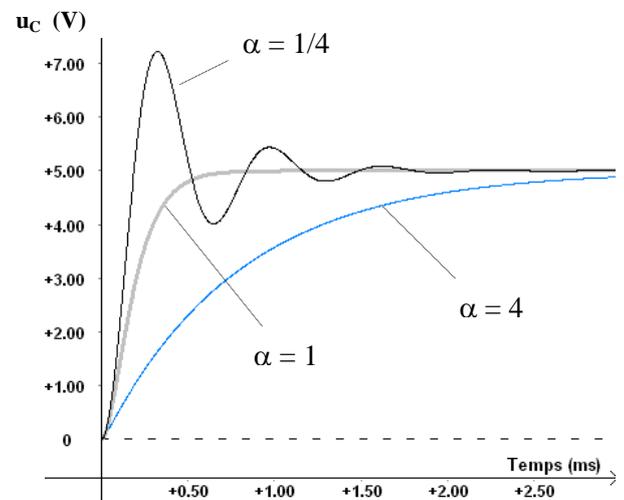
**Fig. 1** Décharge : régimes apériodique et critique



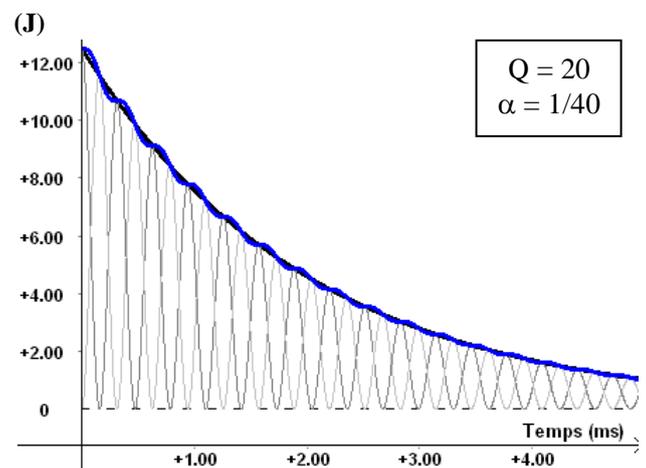
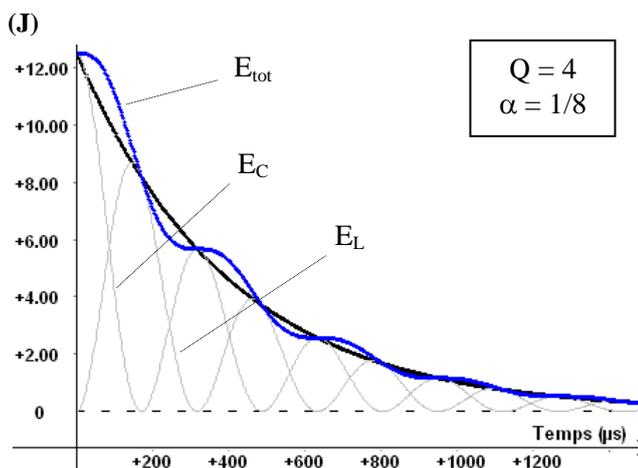
**Fig. 2** Décharge : régime pseudo-périodique



**Fig. 3** Décharge : les différents régimes



**Fig. 4** Charge : les différents régimes



**Fig. 5** Evolutions de  $E_C$ ,  $E_L$  et  $E_{tot}$  lors de la décharge, pour deux valeurs du facteur de qualité