

DS 3 -- Mécanique des fluides (13/11/2020 – 3h)
--

Extrait des Instructions générales des concours

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

Si les résultats ne sont pas soulignés ou encadrés, il sera retiré 1 point /20 à la note finale.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Toute réponse non justifiée ne donnera pas lieu à l'attribution de points.

Toute application numérique ne comportant pas d'unité ne donnera pas lieu à l'attribution de points.

Les différents exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre choisi par le candidat. Il prendra toutefois soin de bien numéroter les questions.

Vous numéroterez toutes vos pages. Si vous rendez 5 pages, vous devez numéroter 1/5, 2/5, 3/5, etc.

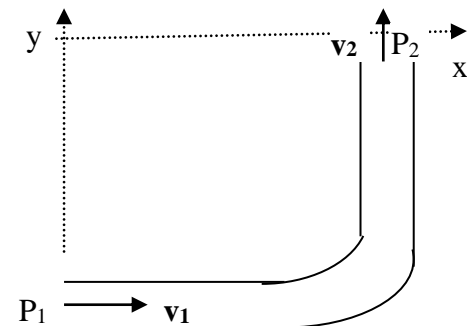
Aucune sortie définitive n'est autorisée avant 16h

Résolution de Pb 1 : Force subie par un coude de canalisation (< 45 min)

Soit un écoulement stationnaire d'eau dans une canalisation horizontale, cylindrique, de section S , présentant un coude d'angle droit. Le dessin ci-contre est une vue de dessus.

Loin en amont du coude, la vitesse V_1 et la pression P_1 sont uniformes. Ces deux quantités sont connues.

Loin en aval du coude, la vitesse V_2 et la pression P_2 sont uniformes, mais inconnues.



Déterminer la force \vec{F} exercée par l'eau sur la canalisation en fonction de ρ, V_1, P_1, S .

On explicitera bien les hypothèses simplificatrices que l'on sera amené à faire sur l'écoulement pour répondre à cette question.

Problème 2 : Etude d'une canalisation, puis d'un canal (CCP PSI 2012)

G. Etude d'une canalisation d'amenée d'eau.

On étudie un écoulement incompressible, laminaire et en régime permanent d'eau liquide dans un tube cylindrique d'axe horizontal Oz et de diamètre D. On note ρ sa masse volumique et η sa viscosité, supposées constantes. On néglige l'effet de la pesanteur. On rappelle que la densité volumique des forces de viscosité s'écrit : $\vec{f}_v = \eta \Delta \vec{v}$.

34) Quelle(s) hypothèse(s) nous conduit (conduisent) à chercher l'expression de \vec{v} sous la forme $\vec{v} = v(r, z) \vec{e}_z$?

35) Rappeler l'équation locale de conservation de la masse. En déduire que la vitesse $v(r, z)$ ne dépend pas de z. On la notera donc $v(r)$ par la suite.

36) Par application de l'équation de Navier-Stokes : $\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\overrightarrow{\text{grad}}(P) + \eta \Delta \vec{v}$:

a) montrer que la pression P ne dépend pas de r,

b) montrer que la fonction $v(r)$ vérifie l'équation différentielle : $\frac{\eta}{r} \left[\frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) \right] = K$, où K est une constante supposée connue.

37) En remarquant que $v(r)$ reste finie et en précisant une quatre condition aux limites, déterminer l'expression de $v(r)$ en fonction de K, η , r et D. Quel est le signe de K lorsque $v > 0$?

38) Déterminer l'expression du débit volumique, noté Q_v , en fonction de K, η et D.

39) A quelle distance r de l'axe la vitesse est-elle maximale ? En notant v_0 cette vitesse maximale, exprimer v_0 en fonction de Q_v et D.

40) Le nombre de Reynolds est défini comme le quotient de deux termes de même dimension. Comment se nomment ces deux termes ?

Préciser l'expression du nombre de Reynolds en fonction de ρ , D, η et Q_v . On admettra que la vitesse caractéristique de l'écoulement correspond à la vitesse moyenne : $U = \frac{4Q_v}{\pi D^2}$.

41) Application numérique : évaluer le débit maximal Q_v et la valeur maximale de v_0 correspondante, notée $v_{0\text{max}}$, pour que l'écoulement de l'eau dans notre canalisation de diamètre $D=0,05\text{m}$ reste laminaire. Conclure.

G. Ecoulement dans un canal, mesure de débit à l'aide d'un tube de Pitot.

On considère l'écoulement stationnaire, supposé incompressible, d'eau liquide assimilable à un fluide parfait, dans un canal rectiligne de section rectangulaire. La base de ce canal se situe dans le plan horizontal Oxy. Sa hauteur $h=50\text{cm}$ est constante selon z. Ce canal subit localement un brusque rétrécissement, sa largeur passe de $L_1=50\text{cm}$ à $L_2=2L_1/3=33\text{cm}$.

Etude qualitative :

La figure 2 représente les lignes de courant de l'écoulement, de part et d'autre du rétrécissement.

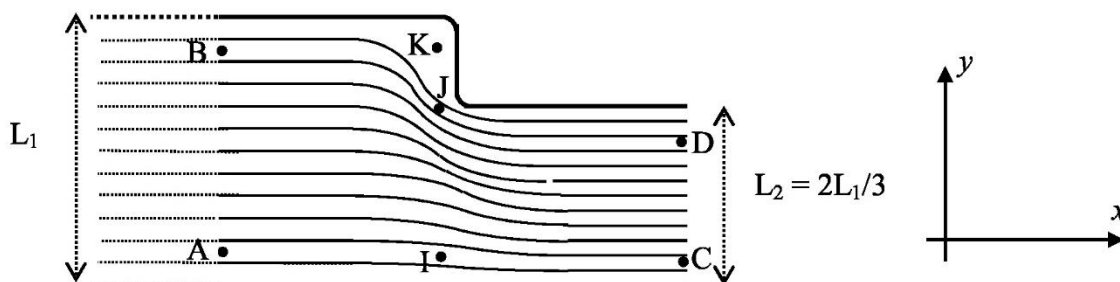


Figure 2

42) Au vu de la figure 2, comparer $v(J), v(K), v(A)$ et $v(C)$.

43) La vitesse au point A, mesurée par un tube de Pitot est de $0,5 \text{ m.s}^{-1}$. Déterminer le débit volumique dans la canalisation. En déduire la vitesse $v(C)$.

Etude quantitative : mesure au tube de Pitot (figure 3).

Le tube de Pitot, de diamètre $d=1 \text{ cm}$, est plongé dans le fluide en écoulement dont on veut évaluer la vitesse locale U . Il possède deux ouvertures. L'une, située au point M, est parallèle à l'écoulement du fluide. L'autre, située au point N, est perpendiculaire à cet écoulement. Par construction du capteur, les points M et N ont quasiment la même altitude. Ces deux ouvertures sont reliées par un tube vertical contenant un autre fluide, statique, plus dense, de masse volumique ρ_0 , de sorte qu'on puisse évaluer la différence de pression entre les points M et N, qui est une image de la vitesse U à déterminer.

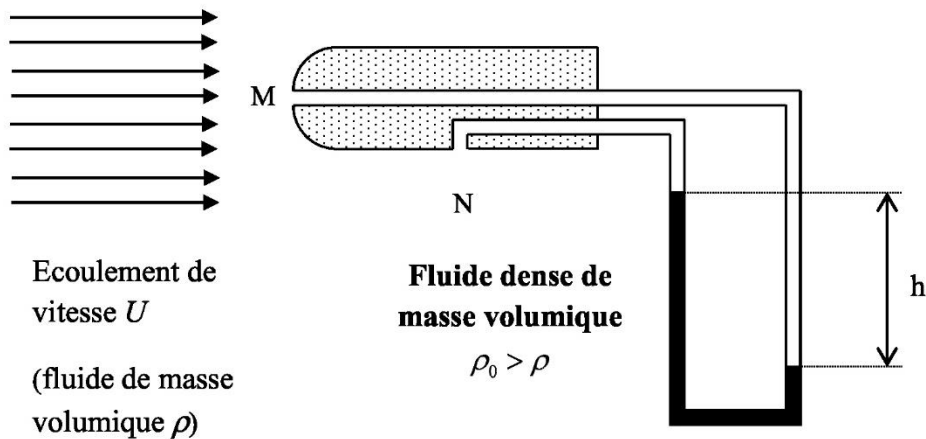


Figure 3

44) Rappeler l'équation de Bernoulli en précisant bien ses hypothèses d'application.

45) Que peut-on dire de la vitesse au point M, notée $v(M)$? En assimilant l'eau à un fluide parfait, en déduire la vitesse U de l'écoulement en fonction de la masse volumique ρ et de la différence de pression $\Delta P = P(M) - P(N)$ entre les points M et N.

46) Exprimer la différence de pression $\Delta P = P(M) - P(N)$ en fonction de h , ρ_0 , ρ et g .

47) En déduire l'expression de la vitesse U en fonction de h , ρ_0 , ρ et g .

48) Calculer le nombre de Reynolds au niveau du tube de Pitot, situé à l'entrée du canal de largeur L_1 . Que pensez-vous de la validité de la mesure de la vitesse au point A ?

Données numériques et constantes physiques.

Masse volumique de l'eau liquide : 10^3 kg.m^{-3} .

Viscosité de l'eau liquide : $1,7 \cdot 10^{-3} \text{ Pa.s}$.

Quelques ordres de grandeurs :

Valeur critique du nombre de Reynolds : 2300.

Débit maximal d'une canalisation domestique : $5 \text{ m}^3/\text{h}$.

Débit usuel d'une canalisation domestique : 200 L/h .

Un formulaire d'analyse vectorielle se trouve à la fin du polycopié

Problème 3 : Micro-centrale hydraulique (Mines-Ponts PSI 2006)

La centrale est alimentée par une conduite d'eau cylindrique de diamètre constant D , dite *conduite forcée*, issue du barrage (Fig. 1). La capacité de ce barrage est suffisamment importante pour que l'on considère l'eau qu'il contient comme immobile. L'extrémité aval de la conduite, notée A, est reliée à une tubulure de section décroissante, appelée *injecteur*.

L'axe vertical repérant l'altitude z est orienté vers le haut. L'altitude du point A est, par convention, nulle ; on note H la dénivellation entre la surface libre de l'eau et l'axe de l'injecteur et h la différence de niveau entre l'entrée de la conduite et la sortie, en A (la différence de niveau entre la surface libre et l'entrée de la conduite est donc $h' = H - h$). L'eau est considérée comme un fluide parfait, incompressible et de masse volumique μ ; elle sort de l'injecteur à l'air libre, sous la pression atmosphérique P_0 , supposée indépendante de l'altitude. Le jet est cylindrique d'axe horizontal et de section circulaire de diamètre D dans la conduite puis d dans l'injecteur. Ce jet frappe la turbine et l'anime d'un mouvement de rotation. On considère les écoulements comme permanents et irrotationnels. On néglige tout frottement. On néglige les variations avec l'altitude de l'accélération de la pesanteur g .

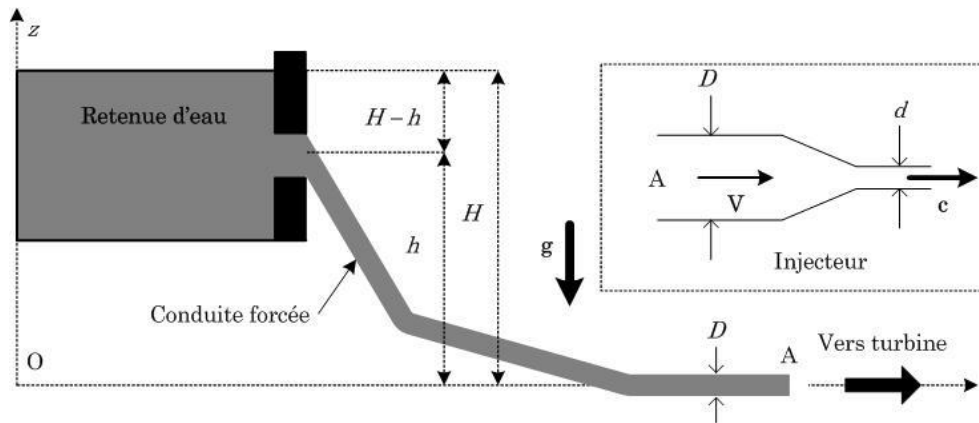


Fig. 1 - Retenue et conduite forcée pour installation hydroélectrique. L'injecteur, en A, est schématisé dans le rectangle en pointillés.

Données : $P_0 = 10^5$ Pa , $g = 10$ m.s⁻² , $D = 60$ cm , $H = 300$ m et $\mu = 10^3$ kg.m⁻³.

I – Conduite forcée

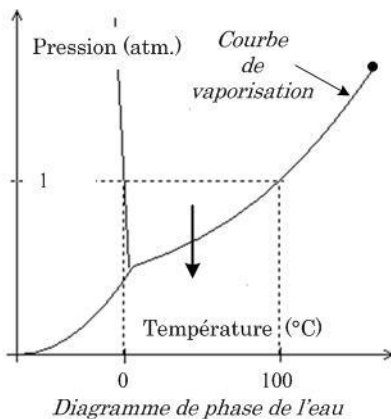
□ 1 – Dans cette question — et dans cette question seulement — on suppose que l'extrémité aval de la conduite n'est pas reliée à l'injecteur ; l'eau sort à l'air libre au point A. En justifiant l'utilisation de la relation de Bernoulli entre le point A et un point quelconque de la canalisation et en considérant la conservation du débit, exprimer la pression $P_1(z)$ à l'intérieur de la conduite sous la forme

$$P_1(z) = P_0 \left(1 - \frac{z}{z_0} \right), \text{ avec } z_0 = \frac{P_0}{\mu g}.$$

Calculer z_0 .

La pression de vapeur saturante de l'eau à la température ambiante est $P_{\text{sat}} \approx 3 \times 10^3$ Pa.

Montrer qu'au-delà d'une certaine altitude, à préciser, ce modèle de pression n'est plus applicable. Le phénomène qui intervient alors (cavitation) engendre toutes sortes de perturbation (attaque des matériaux, bruits ...).



□ 2 – Pour pallier cet inconvénient, on visse en A sur la partie finale horizontale de la conduite un injecteur (encart de la Fig. 1) de section décroissante et de diamètre de sortie $d < D$. Montrer que la vitesse en sortie de l'injecteur, notée c , est $c = \sqrt{2gH}$ (relation de Torricelli). Calculer c .

Établir que la vitesse en A est $V = \left(\frac{d}{D}\right)^2 \sqrt{2gH}$.

□ 3 – Exprimer la pression $P_2(z)$ à l'intérieur de la conduite munie d'injecteur. On admet que l'entrée de la conduite est pratiquement à l'altitude H . Montrer que les phénomènes de cavitation disparaissent dans toute la conduite si d est inférieur à un certain d_0 dont on établira l'expression en fonction de D, P_0, H, g et μ . Vérifier que $d_0 \approx 26$ cm.

□ 4 – Le diamètre de sortie de l'injecteur est $d = 12$ cm. La vitesse réelle du jet en sortie de l'injecteur est $c' = 74 \text{ m.s}^{-1}$. A quelle dénivellation, notée H' , cette vitesse correspondrait-elle ? Exprimer et calculer le coefficient de contraction $C_c = \frac{H'}{H}$. Donner quelques raisons de l'écart à l'unité de ce coefficient.

□ 5 – Exprimer et calculer le débit volumique réel q' de l'injecteur avec pertes, puis le débit massique D_m (en kg par seconde) en fonction de d , de c' et de μ . Exprimer et calculer la puissance cinétique réelle P_c du jet en sortie (débit d'énergie cinétique transportée par le jet, pour la vitesse de sortie c' et le débit associé q').

□ 6 – Justifier que l'on nomme puissance potentielle la quantité $P_{pot} = \mu q' g H$. Exprimer et calculer le rendement de la conduite $\eta = \frac{P_c}{P_{pot}}$ en fonction de C_c .

Problème 4 : Effet de peau en mécanique des fluides (extrait concours CCP)

Considérons une plaque plane, infinie en longueur et largeur, formant le plan xOy . Un fluide visqueux incompressible (par exemple du miel) de viscosité η est déposé sur cette plaque sur une grande épaisseur h . Le fluide occupe alors le demi-espace $z > 0$ (tout se passe comme si l'espace était illimité). La plaque oscille à la pulsation ω , sa vitesse étant $\vec{V}_{plaque} = V_0 \cos(\omega t) \vec{e}_x$. La pression de l'air au-dessus de la couche de liquide est égale à P_0 .

On rappelle l'équation de Navier-Stokes:

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}P} + \eta \vec{\Delta}(\vec{v})$$

B.22 En analysant les invariances et symétries du système et en supposant que la vitesse du fluide est parallèle à celle de la plaque : $\vec{v} = v(x, y, z, t) \vec{e}_x$, de quelles variables dépend effectivement le champ de vitesse ?

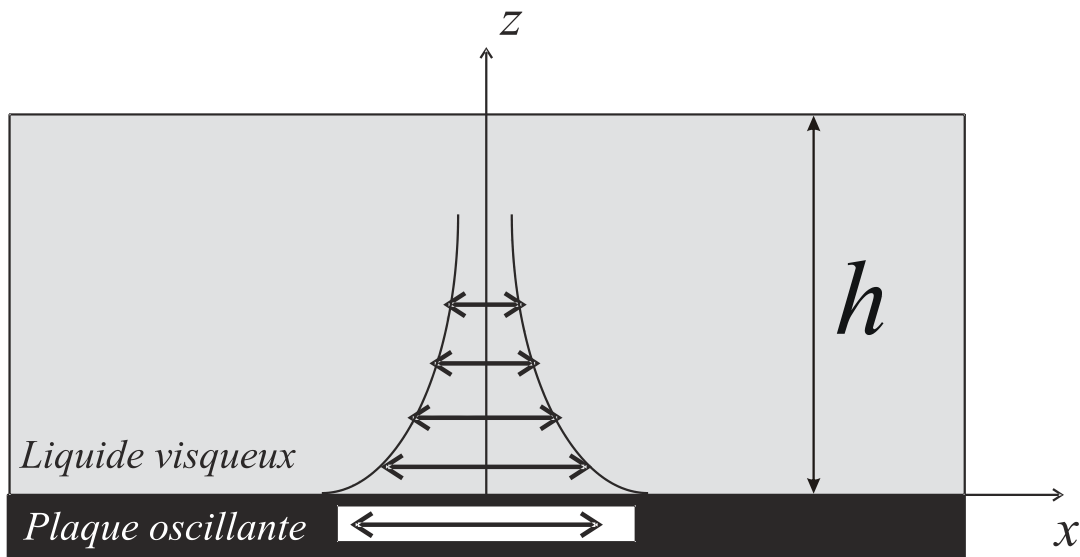


Figure 4 : géométrie de l'écoulement induit

B.23 Montrer que le terme convectif est nul pour ce problème. En déduire alors que la pression dans le fluide est une fonction affine de la cote z et que le champ de vitesse satisfait à l'équation différentielle suivante $\frac{\partial v}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$ où l'on exprimera ν en fonction de ρ et de η . (pour information, ν est appelée viscosité cinématique).

B.24 On cherche une solution pour le champ de vitesse sous la forme $\vec{v} = \underline{f(z)} \cdot e^{i\omega t} \cdot \vec{e}_x$, où $\underline{f(z)}$ est une fonction complexe. En réinjectant dans l'équation différentielle précédente, établir l'équation différentielle vérifiée par $\underline{f(z)}$. Donner la forme générale de $\underline{f(z)}$ (*Indice ci-dessous*) ; on introduira la quantité $\delta = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}$. En déduire l'expression du champ des vitesses, en prenant la partie réelle.

Indice :

Posez le polynôme caractéristique en complexe ; puis déterminer les racines complexes en vous rappelant que $i = \exp\left(\frac{i\pi}{2}\right)$ et que $\exp\left(\frac{i\pi}{4}\right) = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$

B.24bis En étudiant le comportement aux limites du fluide (vitesse connue en $z = 0$; le champ des vitesses ne doit pas diverger en $z \rightarrow +\infty$ (h considéré très grand devant δ)), déterminer les constantes d'intégration. Commenter l'expression obtenue.

B.25 Dans le cas d'un fluide mille fois plus visqueux que l'eau (on rappelle que la viscosité de l'eau est de $10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$) et pour une fréquence de 2 Hz, calculer la valeur numérique de la distance caractéristique d'atténuation δ en prenant comme masse volumique la masse volumique de l'eau.

B.26 Les roches en fusion dans le manteau terrestre sont extrêmement visqueuses et ont une masse volumique très grande, si bien que leur viscosité cinématique ν est de l'ordre de $\nu \approx 10^{-2} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. En déduire une propriété importante pour les ondes sismiques de cisaillement qui ont des fréquences de quelques hertz.

Fin de l'énoncé

FORMULAIRE

Tout n'est pas forcément utile

Opérateurs vectoriels en coordonnées cylindriques :

$$\text{grad}(U) = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{e}_z$$

$$\text{div}(\vec{a}) = \frac{1}{r} \frac{\partial(r a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(a_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(a_z)}{\partial z}$$

$$\text{rot}(\vec{a}) = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(a_z)}{\partial \theta} - \frac{\partial(a_\theta)}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial(a_r)}{\partial z} - \frac{\partial(a_z)}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(r a_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial(a_r)}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z$$

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

$$\Delta \vec{a} = \left(\Delta a_r - \frac{1}{r^2} \left(a_r + 2 \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} \right) \right) \vec{u}_r + \left(\Delta a_\theta - \frac{1}{r^2} \left(a_\theta - 2 \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right) \right) \vec{u}_\theta + (\Delta a_z) \vec{u}_z$$

$$\text{rot}[\text{rot}(\vec{a})] = \text{grad}[\text{div}(\vec{a})] - \Delta \vec{a}.$$