Electromagnétisme Chap.2 –
Electrostatique – Théorème de Gauss

Intro : Les équations de Maxwell sont valides en régimes quelconque. On s'intéresse ici au cas particulier *statique*, qui est synonyme de « stationnaire » en électromagnétisme (contrairement à la mécanique des fluides). On va voir que les phénomènes électrique et magnétique sont *découplés*. On étudie ici le champ électrostatique seulement. On va montrer que *seules les charges électriques sont source du champ électrostatique*. Après avoir fait l'inventaire des propriétés du champ électrique vis-à-vis des *symétries planes (et antisymétries planes)* ainsi que des *invariances par translation et rotation*, on donnera l'équivalent intégral de Maxwell-Gauss : le *Théorème de Gauss*. Dans le cas de distributions de charges « hautement symétriques » (donc simples, les seules au programme…), ce théorème est un outil très efficace pour déterminer le champ électrique créé par les charges électriques.

1. Particularisation des équations de Maxwell en statique

1.1. Découplage des phénomènes électriques et magnétiques

- Montrer qu'en régime statique, les équations de Maxwell sont découplées
- Montrer que la seule source de champ électrique est la densité de charge
- Montrer que la seule source de champ magnétique est la densité de courant

1.2. Les charges électriques sont les sources du champ électrostatique

Puisqu'en statique, seules les charges sont à l'origine du champ électrostatique, les invariances et les symétries planes de la distribution spatiale de charge vont nous renseigner sur les invariances et les symétries planes du champ électrique créé.

1.3. Les différentes modélisations possibles de la répartition de charges

Dans son état le plus stable, la matière est globalement neutre (atomes, molécules, corps qui nous entourent). Expérimentalement, on peut charger électriquement un corps par frottement, par contact, par influence, mais aussi par une action mécanique (piézoélectricité). La répartition de la charge électrique dans une zone de l'espace peut être modélisée de plusieurs manières.

Distribution discrète *(modélisation corpusculaire)*
A l'échelle microscopique, la matière est constituée de corpuscules. On *décrit* alors la répartition de charge électrique par la donnée de *la position de chacune des particules chargées* se trouvant dans la zone de l'espace considérée. On parle de « distribution discrète » de charge électrique : $\{\boldsymbol{q_i}(\vec{\boldsymbol{r}})\}$**.**

La charge totale Q d'une distribution ***discrète*** *de charges q_i est* :

$$Q = \sum_i q_i$$

Distribution continue volumique *(modélisation 3D)*
A l'échelle macroscopique, la matière *apparaît continûment répartie* dans l'espace 3D. Cette répartition n'est pas nécessairement uniforme. Il est donc nécessaire de se placer à l'échelle *mésoscopique*, grande devant l'échelle microscopique pour adopter une modélisation continue de la matière, petite devant l'échelle macroscopique pour pouvoir considérer la répartition localement uniforme.

On définit une ***densité volumique de charge*** $\boldsymbol{\rho}$ à l'échelle mésoscopique, fonction des coordonnées d'espace, qui donne la *quantité élémentaire de charge dQ* située dans un *volume élémentaire $d\tau$* :

$$\boldsymbol{dQ \overset{\text{def}}{=} \rho\, d\tau}$$

La fonction $\boldsymbol{\rho}(\vec{\boldsymbol{r}})$ représente la *distribution volumique de charge*.

La charge totale contenue dans un volume *V* de l'espace est la somme des quantités élémentaires de charge :

$$\boldsymbol{Q = \iiint_V \rho\, d\tau}$$

Cette expression se déduit de celle du cas discret par analogie, en remplaçant le symbole « somme discrète» par le symbole « intégrale » (somme continue de quantités infiniment petites).

Distribution continue surfacique *(modélisation 2D)*
A l'échelle macroscopique, la distribution volumique est la description la plus précise de la répartition de charge dans l'espace. Lorsqu'un corps électrisé possède une dimension très petite devant les autres (feuille de papier par

exemple), on peut décrire la répartition de la charge par une *distribution surfacique*. Dans l'exemple de la feuille de papier, *cela revient à négliger l'épaisseur de la feuille* devant sa longueur et sa largeur.

On définit une ***densité surfacique de charge σ*** à l'échelle mésoscopique, fonction des coordonnées d'espace, qui donne la quantité élémentaire de charge dQ située sur *la surface élémentaire dS* :

$$\boldsymbol{dQ \overset{\text{def}}{=} \sigma\, dS}$$

La fonction $\boldsymbol{\sigma(\vec{r})}$ représente la *distribution surfacique de charge*.

La charge totale située sur une surface S est la somme des quantités élémentaires de charge :

$$\boldsymbol{Q = \iint_S \sigma\, dS}$$

Distribution continue linéique *(modélisation 1D)*

Lorsqu'un corps électrisé possède deux dimensions très petites devant une autre (fil par exemple), on peut décrire la répartition de la charge par une *distribution linéique*. Dans l'exemple du fil, *cela revient à négliger l'épaisseur et la largeur du fil* devant sa longueur.

On définit une ***densité linéique de charge λ*** à l'échelle mésoscopique, fonction des coordonnées d'espace, qui donne la quantité élémentaire de charge dQ située sur *une portion $d\ell$ de la courbe* :

$$\boldsymbol{dQ \overset{\text{def}}{=} \lambda\, d\ell}$$

La fonction $\boldsymbol{\lambda(\vec{r})}$ représente la *distribution linéique de charge*.

La charge totale située sur une courbe Γ est la somme des quantités élémentaires de charge :

$$\boldsymbol{Q = \int_\Gamma \lambda\, d\ell}$$

2. Conséquences des symétries et invariances sur le champ électrostatique

L'objectif de cette étude est de *déterminer certaines propriétés du champ avant tout calcul*, en repérant les symétries et invariances de la distribution de charges qui le génère.

La distribution de charge est la *cause*, et le champ électrostatique créé est *l'effet produit*.

Les invariances et symétries des causes doivent se retrouver dans les effets produits.

2.1. Invariance par translation

Définition

Il y ***invariance*** *de la distribution* ***par translation selon un axe $\vec{e_z}$****,*
si la **distribution ne dépend pas de la coordonnée z** *suivant cet axe.*
Les invariances par translation ne concernent que les distributions infinies.

Propriété du champ $\vec{E}$

Le champ $\vec{E}$ créé par une distribution invariante par translation possède **la même invariance.**

Quelques exemples :

- Fil rectiligne infini uniformément chargé
- Plan infini uniformément chargé
- Cylindre infini uniformément chargé en volume, puis en surface.

2.2. Invariance par rotation

Définition

Il y a ***invariance*** *de la distribution par* ***rotation autour d'un axe*** $\overrightarrow{e_z}$*,*
si la distribution ***est identique à elle-même par rotation*** *autour de cet axe.*

En coordonnées ***cylindriques*** *d'axe vertical* $\overrightarrow{e_z}$*, la distribution* ***ne dépend donc pas de*** $\boldsymbol{\theta}$.

Définition

Il y a ***invariance*** *de la distribution par* ***rotation autour d'un point O****,*
si la distribution est ***identique à elle-même par une rotation quelconque*** *(angle et axe) autour de O.*

En coordonnées ***sphériques****, la distribution est alors* ***indépendante de*** $\boldsymbol{\theta}$ ***et de*** $\boldsymbol{\varphi}$***.***

Propriété du champ $\vec{E}$

Le champ électrostatique créé par une distribution invariante par rotation possède ***la même invariance****.*

Quelques exemples :

- Fil rectiligne infini uniformément chargé
- Plan infini uniformément chargé
- Cylindre infini uniformément chargé en volume
- Sphère uniformément chargée en volume

Conclusion : Utilité des invariances

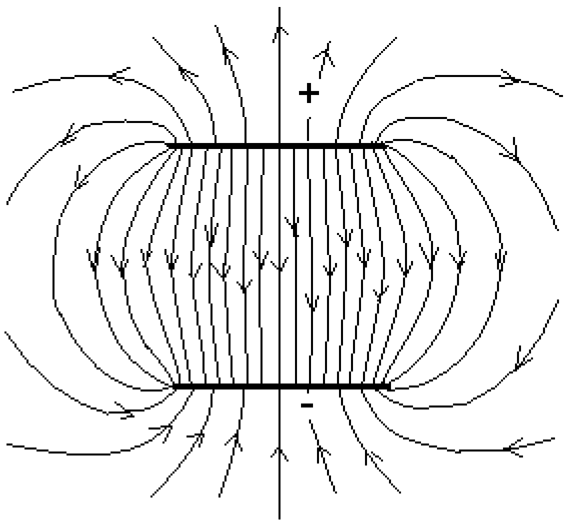
Les ***invariances*** *de la distribution de charge par translation et/ou rotation permettent de déterminer*
la ***dépendance du champ*** $\vec{E}(M)$ ***avec les coordonnées du point* M *où il est évalué****.*

2.3. Symétrie plane

La définition ci-dessous est similaire pour une distribution discrète, surfacique ou linéique.

La distribution admet ***un plan de symétrie*** $\boldsymbol{\Pi}$*, si pour tout point P de la distribution :*
- *il existe un point P' de la distribution,* ***symétrique de P par rapport au plan*** $\boldsymbol{\Pi}$
- $\boldsymbol{\rho(P') = \rho(P)}$

On admet les propriétés du champ électrique vis-à-vis des symétries planes, en s'appuyant sur la carte de champ généré par un condensateur plan (cf. ci-dessous).



Propriété du champ $\vec{E}$

$$\boldsymbol{M' = sym_{\Pi}[M] \quad \Rightarrow \quad \vec{E}(M') = sym_{\Pi}[\vec{E}(M)]}$$

Corollaire

$\boldsymbol{M \in \Pi} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\vec{E}(M)}$ *est* ***inclus*** *dans le plan* Π

Si M *appartient* ***à 2 plans de symétrie,*** $\boldsymbol{\vec{E}(M)}$ *est* ***colinéaire à l'intersection*** *des deux plans.*

Remarque : Ce dernier cas est le plus favorable, car il permet de déterminer complètement la direction du champ.

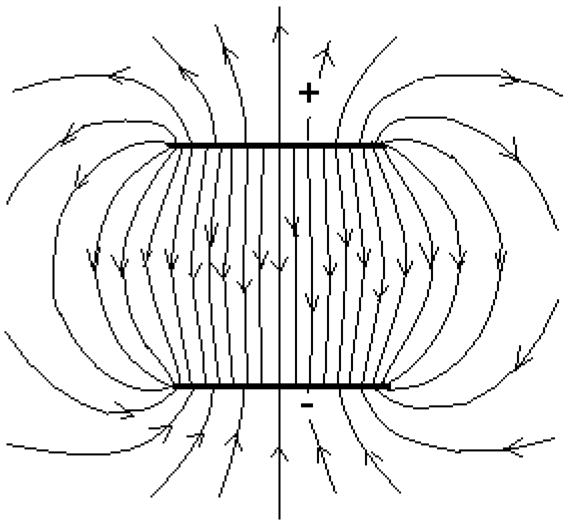
- Sur les quelques exemples ci-dessous, on considère un point M quelconque dans l'espace. Trouver les plans de symétries de la distribution, en se restreignant aux plans qui contiennent le point M :
  - Fil rectiligne de longueur *L* uniformément chargé.
  - Fil rectiligne infini uniformément chargé.
  - Disque de rayon *R* uniformément chargé.
  - Plan infini uniformément chargé.
  - Cylindre de hauteur *H* uniformément chargé en volume, puis en surface.
  - Cylindre infini uniformément chargé en volume, puis en surface.
  - Sphère uniformément chargée en volume, puis en surface.

2.4. Antisymétrie plane

La définition ci-dessous est similaire pour une distribution discrète, surfacique ou linéique.

La distribution admet ***un plan d'antisymétrie*** $\boldsymbol{\Pi_a}$, *si pour tout point P de la distribution :*
- *il existe un point P' de la distribution,* ***symétrique de P par rapport au plan*** $\boldsymbol{\Pi_a}$
- $\boldsymbol{\rho(P') = -\rho(P)}$

On admet les propriétés du champ électrique vis-à-vis des symétries planes, en s'appuyant sur la carte de champ généré par un condensateur plan (cf. ci-dessous).



Propriété du champ $\vec{E}$

$$M' = sym_{\Pi_a}[M] \quad \Rightarrow \quad \vec{E}(M') = -sym_{\Pi_a}[\vec{E}(M)]$$

Corollaire

$\boldsymbol{M \in \Pi_a} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\vec{E}(M)}$ *est* ***orthogonal*** *au plan* Π_a

Remarque : Il suffit d'un seul plan d'antisymétrie pour déterminer la direction du champ en tout point M de ce plan. Mais les plans d'antisymétrie sont plus rares en exercice.

Quelques exemples :

- Cylindre rectiligne de longueur L et de section S de charge linéique ρ_0 sur une moitié, $-\rho_0$ sur l'autre
- Doublet de charge : une charge q et une charge $-q$ placées à deux positions différentes

Conclusion plan de symétrie
Repérer les ***invariances*** *permet de déterminer* **la dépendance de $\vec{E}(M)$ avec les coordonnées** *du point M*
Repérer les ***symétries planes*** *(ou antisymétries) permet de déterminer* **la direction de $\vec{E}(M)$**

3. Flux du champ électrostatique – Théorème de Gauss

Lors de l'étude des phénomènes de transport (masse, volume, charge, particules, énergie thermique, etc.), on a montré que tous les débits peuvent s'écrire comme le flux d'un vecteur densité de courant. On rappelle que la réciproque est fausse : tous les flux ne sont pas des débits d'une grandeur transportée. C'est notamment le cas du flux du champ électrique à travers une surface.

3.1. *(Rappel)* Orientation d'une surface dans l'espace 3D

On rappelle qu'une surface « finie » peut être découpée en une multitude de surfaces élémentaires. *Chaque surface élémentaire est infiniment petite et peut être assimilée à son plan tangent*. Par conséquent, toutes les surfaces élémentaires sont des plans.
Une surface élémentaire est dite *orientée* lorsque l'on choisit conventionnellement d'orienter son *vecteur normal*. L'écriture suivante n'a de signification précise que si l'on a ***au préalable orienté le vecteur $\vec{n}$ sur un schéma*** :

$$\overrightarrow{dS} = dS\,\vec{n}$$

où dS est l'aire élémentaire.
Orienter une surface finie revient à orienter la surface en tout point : en un point M de la surface, on oriente le vecteur normal au plan tangent à la surface. *Il est évident que la convention d'orientation doit être la même en tout point de la surface !!* On rappelle qu'une surface fermée est une surface délimitant un volume. De telles surfaces sont ***toujours conventionnellement orientées vers l'extérieur***.

3.2. *(Rappel)* Flux élémentaire du champ à travers une surface élémentaire

On définit le ***flux élémentaire $d\phi$*** *du champ électrique* ***à travers la surface élémentaire $\overrightarrow{dS}$*** :
$d\phi \overset{\text{def}}{=} \vec{E}\cdot\overrightarrow{dS}$
le champ $\vec{E}$ étant évalué sur la surface élémentaire.

Remarques :

- Le flux élémentaire est défini à partir d'une surface infiniment petite (élémentaire) : ainsi le champ électrique est *uniforme* à l'échelle de cette surface élémentaire. Peu importe alors où se trouve le point M sur cette surface.

Commentaires :

- Le flux est une grandeur *algébrique* : son signe indique *le sens* dans lequel le champ électrique « traverse » la surface élémentaire :
  - s'il est positif, alors le champ traverse la surface dans le même sens que $\overrightarrow{dS}$
  - s'il est négatif, alors le champ traverse la surface dans le sens opposé à $\overrightarrow{dS}$

- La *valeur absolue* du flux est déterminée par la *norme du champ* et par *l'angle entre le champ et le vecteur $\overrightarrow{dS}$*. Pour une norme donnée du champ, la valeur absolue du flux est *maximale* quand le $\vec{E}$ et $\overrightarrow{dS}$ sont colinéaires, et *nulle* quand le champ $\vec{E}$ et $\overrightarrow{dS}$ sont orthogonaux.

3.3. *(Rappel)* Flux du champ à travers une surface finie

Une surface finie peut être découpée en une multitude de surfaces élémentaires.

*Le **flux ϕ** du champ électrique à travers une **surface finie S** est défini comme la somme des flux élémentaires :*

$$\phi \overset{\text{def}}{=} \iint_S d\phi = \iint_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS}$$

*Dans le cas d'une **surface fermée**, la surface est **toujours orientée vers l'extérieur**, et l'expression :*

$$\phi = \oiint_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS}$$

*définit donc le **flux sortant**.*

*Il est indispensable d'avoir repéré la surface sur un **schéma** pour pouvoir parler de « flux du champ ». Il est préférable dans un premier temps de s'habituer à dire « flux du champ à travers une surface ».*

3.4. Théorème de Gauss

On admet ce théorème ; il est valable quelque soit la ou les distributions de charge considérées (volumique, surfacique, linéique ou corpusculaire).

Théorème de Gauss

Le théorème de Gauss établit une relation entre le flux du champ électrostatique à travers une surface *fermée*, et la charge électrique *totale* située à *l'intérieur* du volume délimité par cette surface fermée.

$$\oiint_S \boldsymbol{\vec{E} \cdot \overrightarrow{dS}} = \boldsymbol{\frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}}$$

- Démontrer ce théorème à partir d'une des équations de Maxwell

4. Exemples de calcul de champ à l'aide du Théorème de Gauss

4.1. Méthodes pour calculer un champ en un point de l'espace

On cherche généralement à déterminer le champ électrique en tout point M de l'espace où il est défini.

Méthode théorème de Gauss (la seule au programme)

1. Repérer les ***invariances*** de la distribution de charge, source du champ, *pour déterminer la **dépendance** du champ par rapport aux **coordonnées** du point* M. Il faut définir au préalable un système de coordonnées approprié aux symétries de la distribution de charge.

2. Repérer les ***symétries*** (ou antisymétries) planes de la distribution de charge, source du champ, *pour déterminer la **direction** du champ électrique au point M. Ces plans doivent contenir le point M.*

3. Définir une « ***surface de Gauss*** », *passant par le point M*, et sur laquelle le champ électrique est *uniforme* (si possible), ou *éventuellement tangent sur une partie* de cette surface. Il faut généralement distinguer plusieurs cas, selon la région de l'espace où se situe le point M (à l'intérieur / à l'extérieur de la distribution par ex.)

4. Appliquer alors le ***Théorème de Gauss***. Grâce aux étapes précédentes, le calcul du flux (intégrale double) est généralement très simple si la distribution de charge est « hautement symétrique ».

4.2. Champ créé par une charge ponctuelle

- Déterminer en tout point de l'espace le champ électrique créé par une charge ponctuelle
- Cette formulation vous rappelle-t-elle l'expression d'une autre force fondamentale connue ?
- Trouver deux analogies entre les paramètres de chacune de ces deux forces
- Pour quel signe de la charge le champ est-il divergent ? convergent ? Faire un lien qualitatif avec l'équation de Maxwell-Gauss

Le champ électrique diverge à partir des charges positives et converge vers les charges négatives

4.3. Champ créé par un cylindre uniformément chargé en volume

- Déterminer en tout point de l'espace le champ électrique créé par un cylindre rectiligne infini, de rayon R, chargé uniformément en volume

4.4. Sphère uniformément chargée en volume

- Déterminer en tout point de l'espace le champ électrique créé par une sphère de centre O et de rayon R, uniformément chargée en volume
- Montrer qu'en-dehors de la sphère le champ créé est identique à celui que créerait une charge ponctuelle située en O et égale à la charge totale de la sphère

4.5. Champ à l'intérieur d'une cavité sphérique

Une sphère de centre O et de rayon R, chargée uniformément (ρ_0), possède une cavité sphérique vide de charge, de rayon R/4, et de centre O' situé à mi-chemin sur un rayon (à R/2 de O).

Montrer que le champ est uniforme dans la cavité, on donnera son expression.

4.6. Plan infini uniformément chargé

On modélise une fine couche chargée uniformément par un plan infini uniformément chargé. Cela revient à négliger l'épaisseur de la couche.

- Déterminer en tout point de l'espace le champ électrique créé par ce plan, de charge surfacique σ
- Vérifier que les relations de passage sont bien vérifiées

4.7. Fil rectiligne infini uniformément chargé

- Pour tout point M de l'espace, déterminer l'expression du champ électrostatique créé par un fil rectiligne infiniment long et uniformément chargé.

Le bloc 1 présente les relations de symétrie entre les champs $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ et les sources, sans recourir à des expressions reliant les champs aux sources, mais en s'appuyant sur des exemples de cartes de champs.

Notions et contenus	Capacités exigibles
1. Symétries des champs électrique et magnétique	
Symétries pour le champ $\boldsymbol{E}$, caractère polaire de $\boldsymbol{E}$.	Exploiter les symétries et invariances d'une distribution de charges et de courants pour en déduire les propriétés de $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$.
Théorème de Gauss.	Énoncer et appliquer le théorème de Gauss.
Calculs de champ.	Établir le champ électrique et le potentiel créés par : – une charge ponctuelle, – une distribution de charge à symétrie sphérique. – une distribution de charge à symétrie cylindrique.
Distribution surfacique de charge.	Utiliser le modèle de la distribution surfacique de charge dans le cas d'une distribution volumique d'épaisseur faible devant l'échelle de description. Établir le champ électrique créé par un plan infini uniformément chargé en surface.
Linéarité.	Exploiter le théorème de superposition.