4.1. Analyse dim : une énergie à partir de Q, ε_0, R.

→ on peut faire appel à des formules connues :

$\varepsilon_0 \|\vec{E}\|^2$ en $J m^{-3}$ → $\varepsilon_0 R^3 \|E\|^2$ en J

$\mathrm{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ → $\frac{\|\vec{E}\|}{R}$ "=" $\frac{Q}{R^3 \varepsilon_0}$ → $\|\vec{E}\|^2$ "=" $\left(\frac{Q}{R^2\varepsilon_0}\right)^2$

d'où $E_{const} \propto \varepsilon_0 R^3 \frac{Q^2}{R^4 \varepsilon_0^2}$ → $\boxed{E_{const} \propto \frac{Q^2}{\varepsilon_0 R}}$

→ ou méthode "brutale" : $E_{const} = Q^\alpha \varepsilon_0^\beta R^\gamma$

Q en $C = As$ $\qquad$ R en m $\qquad$ $U = \frac{P}{I} : \frac{\hat{W}}{A}$ ($kg\, m^2 s^{-2} s^{-1}$)

ε_0 en $F m^{-1} = C V^{-1} m^{-1} = A s m^{-1} V^{-1}$

$= A s m^{-1} A\, kg^{-1} m^{-2} s^3$

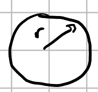
$= A^2 m^{-3} s^4 kg^{-1}$

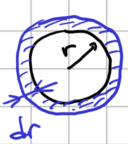
E_{const} en $kg\, m^2 s^{-2}$

donc $\begin{cases} 1 = -\beta \\ 2 = \gamma - 3\beta \\ -2 = \alpha + 4\beta \\ 0 = \alpha + 2\beta \end{cases}$ → $\begin{cases} \beta = -1 \\ \gamma = -1 \\ \alpha = 2 \\ 2 = 2 \text{ ok!} \end{cases}$

d'où $\boxed{E_{const} \propto \frac{Q^2}{\varepsilon_0 R}}$

4.2. → Noyau de charge $Q = Ze$
Volume $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ $\Big\}$ $\rho_0 = \frac{3Q}{4\pi R^3}$

→  $\boxed{q = \rho_0 \times \frac{4}{3}\pi r^3 = Q\left(\frac{r}{R}\right)^3}$

→  $d\tau = 4\pi r^2 dr$ → $\boxed{dq = \rho_0 d\tau = \frac{3Q r^2 dr}{R^3}}$

→ TEM appliqué à cette coquille de charge dq :

$$E_{m_f} - E_{m_i} = W_{op}$$ avec $\Delta E_m = \Delta E_{pot}$ car $E_c = 0$

d'où $$W_{op} = E_{pot_f} - E_{pot_i}$$
$$= dq\,(V(r) - V_\infty)$$

avec $V(M)$ potentiel créé par sphère chargée de rayon r.

<u>Rappel</u> : $V(r) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + C^{te}$ ↳ $= 0$ si $V_\infty = 0$.

d'où $$\boxed{W_{op} = \frac{q \times dq}{4\pi\varepsilon_0 r}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Q\,r^2}{R^3}\,\frac{3Q\,r^2\,dr}{R^3} = \boxed{\frac{3Q^2\,r^4\,dr}{4\pi\varepsilon_0 R^6}}$$

→ Ce W_{op} est en fait un δW_{op} car concerne syst. méso.

$$W_{op} = \int_{r=0}^{R} \frac{3Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R^6}\,r^4\,dr = \frac{3Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R^6}\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^R = \frac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_0 R}$$

pour tt le rayon

$$\boxed{E_{coul} = \frac{3\,Z^2 e^2}{20\,\pi\,\varepsilon_0 R}}$$

→ <u>AN°</u> : $^{60}_{27}Co$ | $Z = 27$, $A = 60$

$$E_{coul} = \frac{3 \times 27^2 \times 1{,}6^2\,10^{-38}}{20\pi\;8{,}9\,10^{-12}\;1{,}2\,10^{-15}\;60^{1/3}}$$
$$= 2{,}1\,10^{-11}\,J$$
$$= 1{,}3\,10^{8}\,eV = 1{,}3\,MeV$$

<u>Rq</u> : nrj de liaison nucléaire est ~ qq MeV / nucléon, donc qq fois de ⊗ sup. à notre E_{coul}.