

Chap.4 – Milieux dispersifs – Milieux absorbants

1. Exemple : câble coaxial avec pertes

2. « Pseudo-OPPH » – Relation de dispersion – Absorption

- 2.1. Une nouvelle famille de solutions : les « pseudo-OPPH »
- 2.2. Signification physique du vecteur d'onde complexe
- 2.3. Relation de dispersion – Vitesse de phase

3. Paquets d'onde en 1D

- 3.1. Préliminaire : somme discrète de deux OPH de fréquences voisines
- 3.2. Paquet d'onde : une somme continue d'OPH
- 3.3. Propagation dans un milieu faiblement dispersif – Vitesse de groupe

4. OEM dans les conducteurs : effet de peau

- 4.1. Cadre de validité de l'étude : loi d'ohm et électroneutralité
- 4.2. Equation d'onde approchée : une équation de diffusion
- 4.3. Relation de dispersion – Vitesse de phase – Vitesse de groupe
- 4.4. Expression de l'onde réelle – Effet de peau
- 4.5. Bilan énergétique : atténuation par l'effet Joule
- 4.6. Modèle du conducteur parfait

5. Ondes thermiques : analogie avec l'effet de peau

- 5.1. Equation d'onde et forme de la solution
- 5.2. Interprétation physique du résultat

6. Propagation d'une OEM dans un plasma peu dense

- 6.1. Ingrédients du modèle
- 6.2. Conductivité complexe du plasma
- 6.3. Relation de dispersion – Filtrage passe-haut – Vitesses de phase et de groupe
- 6.4. (*Complément*) Indice complexe d'un milieu

Intro : Jusqu'à présent, toutes les ondes étudiées vérifiaient l'équation de d'Alembert. Les pulsations temporelle et spatiale d'une OPPH étaient toujours reliées par une relation simple, la vitesse de phase s'identifiant avec la célérité. Ces deux résultats ne sont pas généraux.

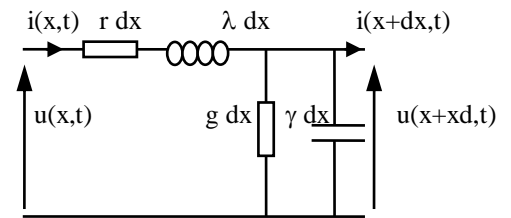
La prise en compte de phénomènes dissipatifs (frottements mécaniques, résistance électrique) fait apparaître une **atténuation** de l'onde au cours de sa propagation.

Indépendamment des frottements, la dépendance de la vitesse de phase avec la fréquence peut déformer une onde réelle au cours de sa propagation : c'est le phénomène de **dispersion**. Le modèle simplifié du **paquet d'ondes** nous permettra de mathématiser la différence entre **vitesse de phase** et **vitesse de groupe**.

Après l'introduction de ces notions sur le cas du câble coaxial, on étudie trois situations classiques : pénétration d'une OEM dans un conducteur, ondes thermiques et pénétration d'une OEM dans un plasma.

1. Exemple : câble coaxial avec pertes

On étudie la propagation d'une onde électrique à l'intérieur d'un câble coaxial, en tenant compte de la résistance de l'âme et de la gaine ($r dx$), ainsi que de la fuite de courant à travers l'isolant (conductance $g dx$).



- Pourquoi modélise-t-on le phénomène sur une tranche élémentaire de câble ?
- Déterminer les équations de couplage des champs $u(x, t)$ et $i(x, t)$
- En déduire l'équation d'onde pour chacun de ces champs. Conclusion ?
- Le phénomène de propagation est-il réversible ?

On trouve l'équation d'onde suivante (idem pour $i(x, t)$):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \lambda \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (g\lambda + r\gamma) \frac{\partial u}{\partial t} - r g u = 0$$

Remarque :

L'équation d'onde n'est plus celle de d'Alembert, même si elle « la contient ».
 On généralise la définition de la **célérité** aux équations non-restreintes à d'Alembert.
 A priori, les « ondes progressives sans déformation » ne sont plus une famille de solution satisfaisante.

- Dans l'exemple étudié, donner l'expression de la célérité en fonction des paramètres du câble.

2. « Pseudo-OPPH » – Relation de dispersion – Absorption

Ce qui suit est restreint aux équations d'onde *linéaires*.

2.1. Une nouvelle famille de solutions : les « pseudo-OPPH »

L'idée est de rechercher des solutions harmoniques en temps $\underline{u}(x, t) = \underline{f}(x) e^{j\omega t}$, avec $\underline{f}(x) = f(x) e^{j\varphi(x)}$. Si l'équation d'onde est linéaire, $\underline{f}(x)$ vérifie une équation différentielle similaire à celle de l'onde, mais complexe.

- Dans l'exemple du câble coaxial avec pertes, déterminer l'EDiff vérifiée par $\underline{f}(x)$.
- Donner la forme des solutions de $\underline{f}(x)$.

Famille de solutions complexes « pseudo-OPPH »

$$\underline{s}(x, t) = \underline{S}_0 e^{j(\omega t - \underline{k}x)}$$

\underline{k} vecteur d'onde complexe

L'appellation « pseudo-OPPH » n'est pas une convention universelle, on parle parfois « d'OPPH à vecteur d'onde complexe », mais c'est plus long à dire.

2.2. Signification physique du vecteur d'onde complexe

Notons k' et k'' respectivement les parties réelle et imaginaire du vecteur d'onde complexe.

- Prendre la partie réelle de l'onde complexe $\underline{s}(x, t)$ pour retrouver l'onde réelle.
- En déduire la signification physique de k' et k'' . Discuter la signification physique de leur signe.
- Quelle est la vitesse de propagation de la phase ?

Milieu absorbant

La partie imaginaire du vecteur d'onde représente l'**atténuation** de l'onde avec le temps (*en général*). Elle est souvent la conséquence d'effets **dissipatifs** d'un milieu absorbant (frottements, résistance électrique). Elle peut aussi être la conséquence d'effets **géométriques** (extension ou rétrécissement du milieu de propagation)

➤ Définir une longueur caractéristique d'atténuation

Remarque 1 : La partie imaginaire du vecteur d'onde est associée à une atténuation de l'amplitude de l'onde. Cette atténuation n'est pas nécessairement une absorption. L'absorption est définie comme étant une atténuation due à un phénomène dissipatif, *qui se traduit par une diminution du stock d'énergie transportée par l'onde*. Il existe des situations où une onde peut être atténuée pour d'autres raisons (effets géométriques par exemple), i.e. sans perte d'énergie.

Remarque 2 : Il existe des situations dans lesquelles l'onde peut être amplifiée, dans un milieu actif par exemple (milieu recevant de l'énergie de la part d'une source extérieure). C'est le cas d'une OEM évoluant dans une cavité laser. Dans le modèle des pseudo-OPPH, cela correspond à une exponentielle croissante de la position (avec les notations précédentes, cela correspondrait à $k'' > 0$).

2.3. Relation de dispersion – Vitesse de phase

Relation de dispersion

La relation entre les pulsations temporelle et spatiale d'une OPPH s'appelle la relation de dispersion :

$$\underline{k}(\omega) = \dots$$

ou

$$\omega(\underline{k}) = \dots$$

La relation $k = \omega/c$ établie pour les ondes vérifiant d'Alembert **n'est donc pas générale**.

Vitesse de phase d'une onde

La phase de l'onde, donc ses surfaces d'onde, se propage à la **vitesse de phase** :

$$v_{\varphi} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\omega}{k'}$$

où k' est la partie réelle du vecteur d'onde complexe.

Milieu dispersif

Un milieu est dit **dispersif** si la **vitesse de phase dépend de la fréquence de l'OPPH** : $v_{\varphi}(\omega)$

Une onde réaliste ne peut être modélisée que par une somme d'OPPH de fréquences différentes.

Dans un milieu dispersif, ces composantes harmoniques ne se propagent pas à la même vitesse, ce qui provoque donc un **étalement temporel** de l'onde totale.

On peut dire que les composantes de l'onde totale « se **dispersent au cours du temps** ».

Une onde réelle est un « paquet d'onde » composé d'un continuum d'OPPH de fréquences différentes. Les OPPH les plus lentes vont petit à petit prendre du retard, alors que les plus rapides vont prendre de l'avance : cela provoque un étalement en temps du paquet d'onde (il est possible qu'il y ait momentanément une contraction en temps du paquet d'onde, mais celui-ci finit toujours par s'étaler, si l'équation d'onde est linéaire).

La dépendance de la vitesse de phase avec la fréquence est à l'origine du phénomène de **dispersion de la lumière blanche par un prisme**. Les lois de Descartes expliquent ce phénomène par la dépendance de l'indice du prisme avec la couleur (la fréquence) de l'onde lumineuse (loi de Cauchy le plus souvent), indice lui-même défini à partir de la vitesse de phase de l'onde dans le prisme.

- Discuter de la nature de l'onde dans les cas particuliers suivants :
 - $k' = 0$
 - $k'' = 0$
- Revenir au cas du câble coaxial avec pertes : établir la relation de dispersion
- Montrer que le câble est un milieu dispersif et absorbant (initier les calculs, et indiquer la suite sans les finir)
- Dans le cas où $\frac{r}{\lambda} = \frac{g}{\gamma}$, déterminer les parties réelle et imaginaire du vecteur d'onde, en fonction de c et $\frac{r}{\lambda}$
- En déduire la vitesse de phase. Le milieu est-il dispersif ? absorbant ?

3. Paquets d'onde en 1D

Tout ce que l'on dit peut globalement être généralisé en 3D pour les OPPH.

3.1. Préliminaire : somme discrète de deux OPH de fréquences voisines

On considère un milieu dispersif unidimensionnel, où peuvent se propager des ondes scalaires 1D.

- Ecrire l'onde résultant de la superposition de deux OPH de même amplitude, et de fréquences voisines ω_1 et ω_2 ($\Delta\omega \ll \omega_1$ et ω_2)
- Grâce à une formule de trigo, démontrer que l'onde résultante est le produit entre une OPH de haute fréquence et une enveloppe OPH de basse fréquence
- Montrer que l'OPH de haute fréquence et son enveloppe ne se propage pas à la même vitesse

3.2. Paquet d'onde : une somme continue d'OPH

OPH et pseudo-OPH : des solutions non-physiques

*Une OPPH est définie en tout point de l'espace et à tout instant. Elle est **illimitée dans l'espace et dans le temps**.
L'énergie qu'elle transporte est infinie : **ce n'est pas une solution physiquement acceptable**.*

On peut montrer que **seule une onde construite grâce à une somme continue d'OPH** est limitée dans l'espace et dans le temps. Lorsque **le spectre en fréquence** de l'onde est limité à un **petit intervalle**, on appelle cette onde un **paquet d'onde**.

$$\underline{s}(x, t) = \int_{\omega_0 - \Delta\omega/2}^{\omega_0 + \Delta\omega/2} \underline{A}(\omega) e^{j(\omega t - k(\omega)x)} d\omega$$

avec $\Delta\omega \ll \omega_0$. Le paquet d'onde réel est donné par la partie réelle de l'expression ci-dessus.

*Le paquet d'onde est un **modèle d'onde réaliste**.*

Toutes les ondes ne peuvent pas être modélisées par un paquet d'onde (mais par des sommes de paquets).

3.3. Propagation dans un milieu faiblement dispersif – Vitesse de groupe

On considère la situation suivante :

- propagation d'un paquet d'onde : spectre rectangulaire étroit, $A(\omega) = A_0$ sur $\Delta\omega \ll \omega_0$, nulle sinon
 - milieu non absorbant : k réel
 - milieu peu dispersif : faible dépendance de k avec ω (sur la largeur $\Delta\omega$ du paquet)
- En effectuant un développement limité au 1^{er} ordre de $k(\omega)$ autour de ω_0 , montrer que :

$$\underline{s}(x, t) = A_0 e^{j(\omega_0 t - k_0 x)} \Delta\omega \operatorname{sinc}_c \left[\frac{\Delta\omega}{2} \left(t - \frac{x}{v_g} \right) \right]$$

Donner l'expression de v_g .

- Interpréter physiquement ce résultat en repérant « une OPH moyenne » et « une enveloppe » Donner alors l'interprétation physique de v_g .

- Montrer que l'ordre de grandeur de la largeur temporelle de l'enveloppe est inversement proportionnelle à la largeur en fréquence du spectre du paquet.

Vitesse de groupe

Un paquet d'onde est constitué d'une OPH moyenne modulée en amplitude par une enveloppe.

Le sommet de l'enveloppe se propage à la vitesse de groupe :

$$v_g \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\omega}{dk}$$

Remarque : On retrouve un résultat analogue au paragraphe précédent (superposition de deux OPH)

Remarque : Il est assez fréquent que la vitesse de groupe s'identifie à la vitesse de propagation de l'énergie. Mais ce n'est pas un résultat général (par exemple faux dans le cas où il y a absorption).

Lorsque le milieu est fortement dispersif, le paquet d'onde se déforme au cours de sa propagation. Il peut momentanément se contracter, mais finit toujours par s'étaler. On trouvera une animation sur le site suivant :

<http://ressources.univ-lemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/divers/paquet.html>

<https://www.youtube.com/watch?v=0WQSoEtknU>

Remarque : Dans les télécommunications, c'est généralement le sommet de l'enveloppe qui **transmet l'information**. Exemple : bits 0 ou 1 dans une fibre optique. Si le milieu est dispersif, l'étalement des bits peut limiter le débit d'information (car problème si deux bits successifs se chevauchent à l'arrivée).

Relation entre largeur spectrale et temporelle

Les largeurs spectrale $\Delta\omega$ et temporelle Δt d'un paquet d'onde vérifient toujours une relation du type :

$$\Delta\omega \times \Delta t \gtrsim 1$$

Elles sont inversement proportionnelles.

Remarque : En physique quantique, cette propriété peut être reliée aux relations d'incertitude de Heisenberg.

4. OEM dans les conducteurs : effet de peau

4.1. Cadre de validité de l'étude : loi d'ohm et électroneutralité

Le conducteur ohmique est caractérisé par sa conductivité γ qui intervient dans la loi d'ohm locale. Pour pouvoir utiliser cette dernière lors de l'établissement de l'équation d'onde, il faut auparavant s'assurer qu'elle est valable dans le cadre de la présente étude.

On rappelle (Phénomènes de transport : chap. 4 Transport de charge) que la loi d'ohm n'est valide que lorsque la fréquence du champ électrique n'est pas trop élevée : $f \ll 10^{14} \text{ Hz}$. Notre étude sera donc limitée aux OEM de fréquences inférieures (la lumière visible est notamment exclue de cette étude).

Par ailleurs, les porteurs de charge subissent a priori une force supplémentaire : la force magnétique, exercée par le champ magnétique de l'OEM. On a montré au chapitre précédent que $E/B \sim v/v_\phi$ où v est la vitesse des porteurs et v_ϕ la vitesse de phase de l'onde dans le milieu de propagation. On avait montré (Phénomènes de transport : chap. 4 Transport de charge) que l'ordre de grandeur de la vitesse d'ensemble des porteurs de charge soumis à un champ électrique était de $qq \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$. On verra que la vitesse de phase des ondes dans le métal est nettement supérieure à cette valeur. Conclusion : on néglige la force magnétique dans notre étude.

Loi d'Ohm locale et électro-neutralité du conducteur (pour $f \ll 10^{14} \text{ Hz}$)

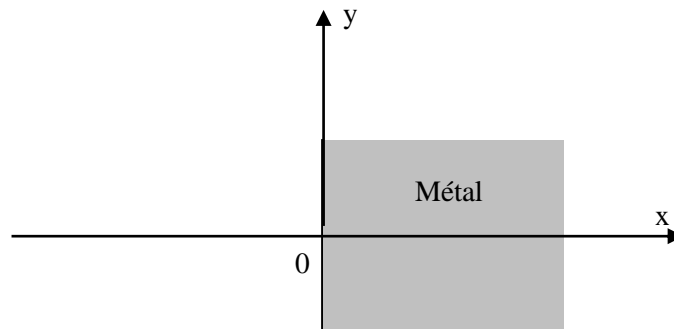
$$\vec{j} = \gamma \vec{E}$$

$$\rho = 0$$

- Grâce à M.G. et M.A., puis à l'aide d'une application numérique, démontrer la validité de l'électro-neutralité

Interprétation qualitative de la nullité de la charge volumique : Dès qu'une zone est appauvrie en porteurs mobiles, et commence donc à se charger, les porteurs mobiles voisins s'y précipitent avec un temps de réponse très court. Pour un régime lentement variable ($\ll 10^{14} \text{ Hz}$), les porteurs n'ont pas le temps de s'accumuler en une zone de l'espace (analogie avec l'incompressibilité des liquides).

Remarque : Pour des champs plus rapidement variables, la conductivité devient complexe, ce qui signifie simplement que le courant n'a plus le temps de s'aligner sur le champ électrique (temps de réponse trop grand). A très haute fréquence, le courant tend même vers zéro, le conducteur apparaissant donc comme un filtre passe-bas (entrée = champ électrique, sortie = courant).



4.2. Equation d'onde approchée : une équation de diffusion

On considère un conducteur emplissant tout le demi-espace $x > 0$ (cf. schéma ci-dessus). En $x = 0$, on suppose que le champ incident est imposé et vaut $\vec{E}(x = 0, t) = E_0 \cos(\omega t) \vec{u}_y$.

- Comparer le terme de courant de déplacement au terme de courant libre. Conclure
- Etablir l'équation d'onde vérifiée par \vec{E} . Comment nomme-t-on cette équation ?
- (*Facultatif*) Montrer que \vec{B} vérifie la même équation d'onde

4.3. Relation de dispersion – Vitesse de phase – Vitesse de groupe

Comme dit dans les chapitres précédents, il existe deux méthodes pour déterminer la relation de dispersion. On se donne une OPPH complexe (à vecteur d'onde complexe, donc une « pseudo-OPPH »), puis : soit on la réinjecte dans l'équation d'onde, soit on la réinjecte dans les équations de couplage. Tout cela en utilisant la correspondance entre opérateurs différentiels et opérateurs complexes.

La seconde méthode est étudiée en exercice. On effectue la première dans ce paragraphe.

- Etablir la relation de dispersion entre la projection du vecteur d'onde complexe et la pulsation temporelle
- Déterminer les expressions de sa partie réelle et de sa partie imaginaire
- Introduire dans ces expressions une longueur caractéristique notée δ
- Déterminer la vitesse de phase. Le conducteur est-il un milieu dispersif ?
- En différenciant la partie réelle de la relation de dispersion $k'(\omega)$, déterminer la vitesse de groupe
- Cette dernière semble diverger à haute fréquence. Via une application numérique, et en rappelant que le domaine de validité de l'étude est limité en fréquence, montrer que la vitesse de groupe ne peut pas dépasser c

4.4. Expression de l'onde réelle – Effet de peau

- Ecrire l'onde électrique en complexe. En déduire l'onde magnétique en complexe
- Ecrire ces deux ondes en notation réelle. Quelle est la signification physique de δ ?
- Déterminer sa valeur numérique dans le cuivre à 50 Hz. Que peut-on en tirer pour les applications concrètes ?

Effet de peau

Dans un conducteur ohmique, le champ électromagnétique et le courant électrique tendent à se répartir sur les bords du conducteur

Remarque : On peut reconnaître ici la loi de Lenz de l'induction. Le champ imposé depuis l'extérieur crée des courants induits dans le conducteur. Ces courants tendent à s'opposer à la cause qui leur a donné naissance, donc à annuler le champ à l'intérieur du conducteur. Si l'on considère un petit volume situé bien au cœur du conducteur, il est bien entouré par des courants induits voisins, et cet effet de modération joue pleinement à son niveau. Mais un volume situé sur les bords est moins entouré par des courants induits, car il est proche de l'extérieur où il ne règne aucun courant : l'effet de modération joue donc moins. Ceci explique qualitativement que le champ électrique y soit plus intense (plus proche de la valeur imposée depuis l'extérieur).

4.5. Bilan énergétique : atténuation par l'effet Joule

- Rappeler l'équation locale de conservation de l'énergie EMic en présence de porteurs de charge libres
- L'écrire sous forme globale, en considérant comme système un volume de conducteur de section S selon les directions Oy et Oz et s'étendant de $x = 0$ jusqu'à l'infini... (pas de crainte, les intégrales vont converger)
- Prendre la valeur moyenne de cette équation globale de conservation

On utilise à présent les expressions des champs \vec{E} et \vec{B} établies précédemment

- Justifier que la moyenne temporelle du terme de variation d'énergie stockée est nulle
- En déduire que la puissance électromagnétique entrante est intégralement dissipée par effet Joule
- Le vérifier avec les expressions des champs établies précédemment

Origine physique de l'atténuation de l'OEM dans le conducteur

Toute la puissance électromagnétique qui pénètre dans le conducteur est dissipée par effet Joule. L'atténuation de l'OEM est due à un phénomène d'absorption.

4.6. Modèle du conducteur parfait

Définition d'un conducteur parfait

Lorsque l'épaisseur de peau est très petite devant les dimensions du conducteur, on peut la considérer comme d'épaisseur nulle (cela revient à « regarder le conducteur de très loin »). Tous les champs sont nuls à l'intérieur du conducteur, et le courant qui existait dans l'épaisseur de peau se retrouve donc à la surface du conducteur. Dans cette modélisation, il n'existe plus qu'un courant surfacique \vec{j}_S .

5. Ondes thermiques : analogie avec l'effet de peau

5.1. Equation d'onde et forme de la solution

C'est une situation tout-à-fait similaire à celle de la propagation d'une OEM dans un conducteur, étudiée précédemment. On souhaite étudier l'évolution de la température dans le sol, la température à la surface variant de manière sinusoïdale autour d'une valeur moyenne T_0 . On oriente l'axe \vec{u}_z verticalement vers le haut.

- Rappeler l'équation de la diffusion thermique dans le sol

On choisit une solution OPPH (à vecteur d'onde complexe) oscillant autour de la même valeur moyenne T_0 .

- Etablir la relation de dispersion des ondes thermiques
- Par analogie avec l'étude précédente, donner l'expression mathématique de la température $T(z, t)$ en tout point du sol

5.2. Interprétation physique du résultat

- Evaluer numériquement δ , l'épaisseur caractéristique d'évolution de la température dans le sol :
 - pour une période de l'excitation égale à 24h (cycles jour/nuit)
 - pour une période de l'excitation égale à 1 an (cycle annuel)
- Evaluer numériquement le décalage temporel entre les maxima de température à la surface et à $z = -\delta$. A quelle profondeur l'onde est-elle en opposition de phase avec l'excitation ? A cette profondeur, quelle est l'amplitude de l'onde thermique ?

6. Propagation d'une OEM dans un plasma peu dense

6.1. Ingrédients du modèle

Un plasma est un milieu globalement neutre, où les atomes sont partiellement ou totalement ionisés ; les électrons et les ions sont libres de se déplacer. Au repos, les densités volumiques d'électron et d'ion ont la même valeur n_0

Hypothèses :

- le plasma est suffisamment dilué pour négliger les interactions entre les charges
 - les électrons sont non-relativistes : leur vitesse est très faible devant celle de la lumière dans le vide $v \ll c$
 - on étudie une onde *transverse* pseudo-OPPH selon $+\vec{u}_z$, polarisée rectilignement selon \vec{u}_x (d'autres types d'onde peuvent exister, on ne les étudiera pas)
- Ecrire mathématiquement le champ électrique de cette onde, en notation complexe
 - Grâce à MF, en déduire l'expression du champ magnétique (pseudo-OPPH aussi)
 - Donner un argument justifiant que l'on puisse négliger le déplacement des ions devant celui des électrons

6.2. Conductivité complexe du plasma

- Grâce à MG, montrer que la charge volumique totale est nulle à chaque instant. En déduire que la densité volumique d'électrons est uniforme et constante, égale à n_0 à chaque instant.
- En notation complexe, appliquer la RFD sur un électron du plasma. En supposant la vitesse de phase de l'onde $v_\varphi \gtrsim c$ (on le vérifiera à la fin), et en supposant le vecteur d'onde réel (on le vérifiera à la fin) comparer les ordres de grandeur des forces électrique et magnétique. Conclure
- Déterminer la conductivité complexe du milieu. Montrer que \vec{j} et \vec{E} sont en quadrature de phase. Que peut-on dire de la puissance volumique moyenne transmise aux électrons par l'onde ? L'onde sera-t-elle atténuée ?

6.3. Relation de dispersion – Filtrage passe-haut – Vitesses de phase et de groupe

- Grâce aux équations de Maxwell écrites en notation complexe, établir la relation de dispersion
- Montrer que le plasma est un passe-haut pour les OPPH. On introduira une pulsation de coupure : *la pulsation plasma* ω_p . Faire l'application numérique dans le cas de l'ionosphère : $n_0 \sim 10^{10} - 10^{12} \text{ m}^{-3}$
- A basse fréquence, donner l'expression de l'onde réelle. Idem à haute fréquence.
- A haute fréquence, déterminer la vitesse de phase et la vitesse de groupe. Le plasma est-il dispersif ? Tracer les vitesses en fonction de la pulsation.

Remarque : A basse fréquence, l'onde est stationnaire et spatialement atténuée : c'est une onde évanescence. Une OPPH de fréquence $f < f_p$ se propageant dans le vide et incidente sur le plasma sera totalement réfléchi.

L'ionosphère est une couche de la haute atmosphère où règne un plasma. Les ondes radio peuvent s'y réfléchir (ainsi qu'au sol) et ainsi voyager d'un bout à l'autre de la Terre.

6.4. (Complément) Indice complexe d'un milieu

Définition de l'indice complexe : \underline{n}

$$\underline{k} \stackrel{\text{def}}{=} \underline{n} \frac{\omega}{c}$$

*Sa partie réelle n' s'appelle l'indice de dispersion.
Sa partie imaginaire n'' s'appelle l'indice d'absorption.*

D'après sa définition, l'indice regroupe toute les propriétés du milieu qui le font s'écarter d'un comportement type « d'Alembert ». Il n'est donc pas surprenant que l'indice complexe du vide soit égal à 1.

- En exprimant sa partie réelle n' en fonction de la vitesse de phase v_φ , mettre en évidence la cohérence de cette définition avec celle donnée en optique.
- Justifier l'appellation 'indice d'absorption' pour sa partie imaginaire.
- Déterminer l'expression de l'indice complexe du plasma. Conclure en distinguant les deux cas. L'indice est-il toujours supérieur à 1 comme en optique ?

Définition d'un milieu transparent

Un milieu est transparent lorsque l'indice est réel ($n'' = 0$).

Le bloc 2 est consacré aux phénomènes de propagation régis par des équations aux dérivées partielles linéaires à coefficients constants. L'étude est menée sur des ondes harmoniques unidimensionnelles lorsque l'équation de propagation est linéaire mais n'est pas une équation de d'Alembert. On évoque ensuite la théorie de Fourier pour justifier qu'une onde quelconque limitée dans le temps est la superposition d'ondes harmoniques : on définit ainsi la notion de paquet d'onde. Pour finir, on applique les notions nouvellement introduites sur la dispersion à la propagation des ondes dans les milieux conducteurs et les plasmas.

Notions et contenus	Capacités exigibles
2. Phénomènes de propagation linéaires : absorption et dispersion	
2.1. Relation de dispersion	
<p>Forme générique des solutions progressives sinusoïdales : $y = y_0 e^{j(\omega t - \underline{k} \cdot x)}$</p>	<p>Identifier le caractère linéaire d'une équation aux dérivées partielles de propagation.</p> <p>Établir la relation de dispersion.</p> <p>Lier la partie réelle de \underline{k} à la vitesse de phase, la partie imaginaire de \underline{k} à une dépendance spatiale de l'amplitude.</p> <p>Définir la notion de milieu dispersif.</p>
2.2. Paquet d'ondes	
<p>Superposition de deux ondes de fréquences proches dans un milieu non absorbant et dispersif.</p> <p>Domaine spectral d'un paquet d'onde de durée finie.</p>	<p>Calculer la vitesse de groupe à partir de la relation de dispersion. Associer la vitesse de groupe à la propagation de l'enveloppe du paquet d'ondes.</p> <p>Énoncer et exploiter la relation entre les ordres de grandeur de la durée temporelle d'un paquet d'onde et la largeur fréquentielle de son spectre.</p>
2.3. Ondes électromagnétiques planes dans des milieux conducteurs	
<p>Cas d'un conducteur ohmique de conductivité réelle : effet de peau.</p> <p>Modèle du conducteur parfait en présence d'un champ électromagnétique variable.</p>	<p>Repérer une analogie formelle avec les phénomènes de diffusion. Établir la relation de dispersion. Associer l'atténuation de l'onde à une dissipation d'énergie. Citer l'ordre de grandeur de l'épaisseur de peau du cuivre à 50 Hz.</p> <p>Justifier que les champs électrique et magnétique sont nuls dans le conducteur.</p>
<p>Interaction entre une onde plane progressive harmonique et un plasma localement neutre peu dense. Conductivité imaginaire pure. Interprétation énergétique.</p> <p>Équation de propagation dans le plasma. Onde</p>	<p>Décrire le modèle de la conduction électrique dans un plasma. Construire une conductivité complexe en justifiant les approximations. Associer le caractère imaginaire pur de la conductivité complexe à l'absence de puissance échangée entre le champ et les porteurs.</p> <p>Établir la relation de dispersion dans le plasma.</p>
<p>plane progressive harmonique dans le plasma.</p> <p>Onde évanescence dans le domaine réactif ; absence de propagation de l'énergie.</p>	<p>Identifier une onde évanescence (onde stationnaire spatialement amortie).</p> <p>Expliquer la notion de fréquence de coupure et donner son ordre de grandeur dans le cas de l'ionosphère.</p>

Ces ondes qui restent en forme

Comment éviter qu'un train pénétrant à grande vitesse dans un long tunnel engendre une onde de choc aux effets désagréables ? En transformant l'onde sonore initiale en soliton – une onde qui ne se déforme pas.

En entrant dans un tunnel, un train à grande vitesse crée dans l'air une surpression qui, en se propageant, se transforme en une onde de choc (voir la figure 1). Diverses solutions ont été proposées pour éviter aux passagers et aux riverains ses effets gênants telles des secousses ou des déflagrations sonores ; la plus originale consisterait à convertir l'onde de choc en une « onde solitaire » beaucoup moins agressive. Qu'est-ce qu'une telle onde et comment l'obtenir ? La lumière nous viendra de... la lumière ! Nous ferons en effet un détour par les solitons optiques, impulsions lumineuses qui parcourent des centaines de kilomètres de fibre optique sans se déformer.

Tel un piston dans un tube, un train qui pénètre dans un tunnel comprime l'air brutalement, et la surpression créée se propage le long du tunnel. À l'intérieur de cette surpression d'environ 1 000 pascals (un centième d'atmosphère), l'air est d'autant plus chaud qu'il est comprimé, c'est-à-dire que la pression est plus élevée. La vitesse du son augmentant avec la température, les différentes zones de la surpression, qui ne sont pas à la même température, se déplacent à des vitesses distinctes. L'onde de surpression se déforme alors peu à peu : la zone la plus comprimée rattrape le front avant, telle la crête d'une vague qui s'apprête à déferler (voir la figure 2).

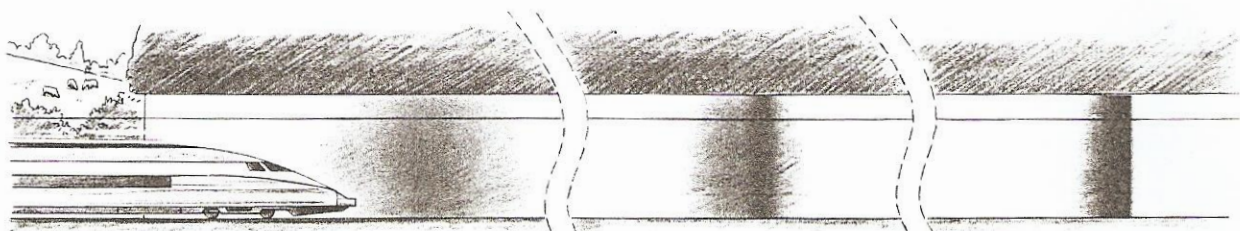
Après plusieurs centaines de mètres, l'onde de surpression s'est raccourcie et son amplitude a presque doublé. Son front est devenu abrupt, elle est devenue une onde de choc. Au bout du tunnel, elle se réfléchit partiellement vers le train et les passagers, qu'elle incommode, tandis qu'à l'extérieur les riverains entendent une sorte de coup de tonnerre.

Pour empêcher l'onde de surpression de se transformer en une onde de choc, il faudrait pouvoir réaliser l'équivalent acoustique du mascaret : une vague qui, lors des grandes marées, remonte les fleuves sans déferler. Ce type d'onde, nommé aujourd'hui soliton, fut observé en 1834 par John Scott Russell, un ingénieur de la marine écossaise. L'arrêt brusque d'un bateau dans un canal étroit avait créé une vague haute d'environ 50 centimètres et longue de 10 mètres qui, à sa grande surprise, ne déferlait pas. Pendant près d'un quart d'heure, Russell suivit à cheval – à la vitesse d'une dizaine de kilomètres par heure – cette onde sans constater de modification de son profil.

Des mascarets de lumière

Dans un soliton, un second effet, opposé à celui vu avec l'onde de surpression, empêche l'onde de se raidir. Pour le comprendre, examinons les solitons optiques, impulsions lumineuses particulières qui se propagent dans une fibre optique. Comme la surpression dans un tunnel, une impulsion lumineuse se déforme lors de sa progression, car la vitesse de propagation de la lumière dans la matière dépend de l'intensité de l'onde. Aussi la vitesse de la partie centrale de l'impulsion est-elle différente de la vitesse de ses flancs. Même si cet effet, dit de non-linéarité, est très faible pour les intensités lumineuses utilisées pour les télécommunications, il se cumule sur les centaines de kilomètres de fibre et pose problème : l'impulsion déformée risque de chevaucher ses voisines, d'où des erreurs de transmission du signal.

À l'inverse de l'onde de surpression aérienne, la vitesse de propagation de l'onde lumineuse diminue avec l'intensité.



1. La vitesse du son augmente avec la température. Or dans la zone centrale de l'onde de surpression (à gauche), la pression est maximale et l'air est plus chaud. Cette partie avance plus vite que le

front avant. Au bout de deux ou trois kilomètres, la zone centrale a rattrapé l'avant de l'onde. L'onde de surpression, raccourcie, est devenue une onde de choc (à droite) où la surpression a presque doublé.



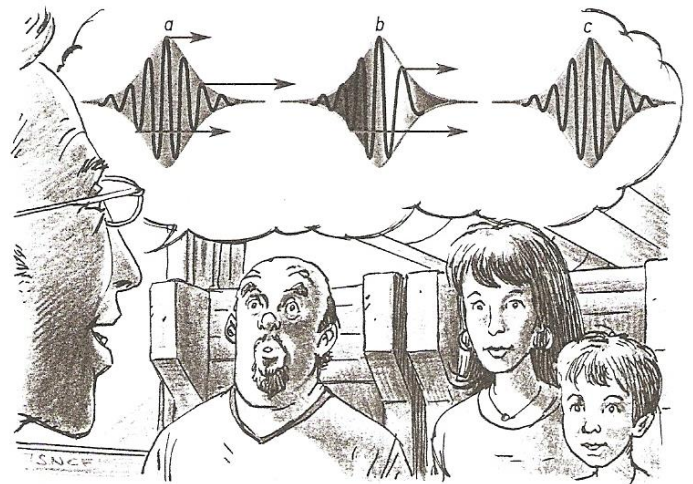
2. Le haut d'une vague parvenue près du rivage avance plus vite que les parties avant et arrière (comme pour l'onde de surpression créée par un train). C'est pourquoi la vague se déforme et finit par déferler. Dans un mascaret – un soliton hydrodynamique –, la dispersion (variation de la vitesse en fonction de la longueur d'onde) compense exactement ce phénomène.

L'intensité étant maximale vers le milieu de l'impulsion lumineuse, cette zone avance moins vite que le front avant ou arrière de l'onde. Il s'ensuit que les oscillations formant l'onde initiale se resserrent à l'arrière et se desserrent à l'avant : les longueurs d'onde diminuent à l'arrière et augmentent à l'avant (voir la figure 3).

Le second effet antagoniste, dit de dispersion, entre alors en jeu : dans la matière, la vitesse de la lumière dépend de la longueur d'onde. Au sein d'une fibre optique, la vitesse de propagation diminue quand la longueur d'onde augmente. L'avant de l'impulsion se propage donc moins vite que l'arrière. Peu à peu, les composantes de courtes longueurs d'onde rattrapent, puis dépassent les composantes de grandes longueurs d'onde, à l'inverse de l'effet précédent. Pour une intensité lumineuse bien choisie, les deux effets se compensent exactement et créent un soliton optique : une impulsion lumineuse qui se propage en conservant sa forme.

Un tel soliton est une entité robuste. Si l'intensité initiale est trop élevée, l'impulsion lumineuse commence par se déformer et par perdre une partie de son énergie, pour finalement former un soliton qui se propage sur des milliers de kilomètres. De plus, on peut injecter dans une fibre optique des solitons de longueurs d'onde différentes. Ceux-ci se propagent à des vitesses différentes et peuvent donc entrer en collision. Toutefois, de façon surprenante, chaque soliton reprend après la collision sa forme et sa course solitaire, comme si chaque soliton avait une vie propre et indépendante.

Longtemps considérée comme une utopie, la télécommunication optique par solitons est maintenant une réalité. Ainsi, une partie des communications entre la Corse et le continent s'effectue depuis 2002 par solitons circulant dans 350 kilomètres de fibre optique, sans aucun relais sous la mer, avec un débit maximal de 800 gigabits par seconde et par fibre.



3. Dans une fibre optique, la partie intense d'une impulsion lumineuse avance moins vite (a), ce qui dilate les ondulations à l'avant et, inversement, les resserre à l'arrière (b). Par ailleurs, les courtes longueurs d'onde se propagent plus vite que les grandes (b). Quand ces deux effets se compensent, on a un soliton optique, impulsion qui garde sa forme (a et c).

Qu'en est-il du mascaret ? Il se décompose lui aussi en vagues de longueurs d'onde différentes, qui se propagent à des vitesses distinctes. Comme pour le soliton optique, deux effets – la non-linéarité liée à l'amplitude et la dispersion des longueurs d'onde – se compensent et assurent sa stabilité.

Un soliton sonore au Soleil levant

Et pour les ondes de surpression dans l'air ? La vitesse du son étant la même pour toutes les longueurs d'onde, il n'y a pas d'effet de dispersion. C'est pourquoi il n'existe pas de soliton naturel en acoustique. Comment éviter alors que l'onde de surpression créée par un train ne se déforme en une onde de choc ?

Pour former un soliton acoustique, Nobumasa Sugimoto, de l'Université d'Osaka, a trouvé le moyen d'introduire de la dispersion : brancher à intervalles réguliers sur les côtés du tuyau des résonateurs acoustiques (de simples cavités) de taille adaptée. Pour les longueurs d'onde proches de la valeur correspondant à une résonance des cavités, la propagation est ralentie. En choisissant bien la taille des résonateurs, on obtient l'effet de dispersion recherché. Les expériences se sont limitées jusqu'à présent à des tubes de dix mètres de longueur, mais N. Sugimoto est persuadé que de tels branchements aideront à mettre au point des machines moins bruyantes – des compresseurs par exemple – et permettront un jour de transporter chaleur ou autres formes d'énergie par voie acoustique !

N. SUGIMOTO et al., *Verification of acoustic solitary waves*, in *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 504, pp. 271-299, 2004.

M. REMOISENET, *Waves called solitons* (3^e éd. corrigée), Springer, 2003.