

1. L'oscillateur harmonique, un modèle très utilisé en physique

- 1.1. Préalable mathématique : développement limité et formule de Taylor-Young
- 1.2. Petites oscillations autour d'une position d'équilibre stable
- 1.3. Exemple des petites oscillations du pendule
- 1.4. Exemple des petites oscillations d'un point attaché à un ressort
- 1.5. Définition de l'oscillateur harmonique : un oscillateur sinusoïdal

2. Etude du régime libre de l'oscillateur harmonique

- 2.1. Définition du régime libre de l'OH
- 2.2. Etude énergétique de l'OH
- 2.3. Portrait de phase de l'OH
- 2.4. Isochronisme des petites oscillations

3. Etude du régime libre de l'oscillateur harmonique amorti

- 3.1. Définition d'un OH amorti
- 3.2. Résolution de l'équation différentielle : 3 types de régimes
- 3.3. Régimes pseudo-périodique : décroissement logarithmique
- 3.4. (Complément) Très faibles amortissements : interprétation énergétique de Q
- 3.5. Portrait de phase d'un OH *amorti*

4. Analogies entre grandeurs électriques et mécaniques

Intro :

On introduit dans ce chapitre le modèle de l'oscillateur harmonique (OH), dont le champ d'application est très vaste en physique. Il permet dans certaines conditions d'étudier les vibrations de systèmes mécaniques (bâtiment vibrant sous l'action du vent, vibrations d'une voiture sur une route accidentée), mais aussi les vibrations des atomes au sein des molécules ou des solides. On retrouve ce modèle dans d'autres domaines de la physique : physique quantique, physique statistique.

Dans ce chapitre, notre étude se limite aux oscillations mécaniques, dans le cas où le système peut être :

- assimilé à un point matériel
- repéré par une seule coordonnée d'espace (problème à un degré de liberté)

Le modèle de l'OH est adapté à l'étude de petites oscillations autour d'une position d'équilibre stable, pour un système *en évolution conservative*. Dans le présent chapitre, on se limite à l'étude de l'OH en régime libre, c'est-à-dire non soumis à une excitation extérieure. Cela signifie que les forces appliquées au système ne dépendent pas explicitement du temps.

On abordera ensuite l'étude de l'OH soumis à des forces de frottement fluide. On parle d'oscillateur harmonique amorti. On verra que la résolution mathématique est totalement similaire à celle introduite pour l'étude des régimes transitoires du circuit RLC série. Suite à cette étude, on dégagera quelques *analogies entre les grandeurs électriques et mécaniques*.

1. L'oscillateur harmonique, un modèle très utilisé en physique

1.1. Préalable mathématique : développement limité et formule de Taylor-Young

On considère une fonction $f(x)$ de la variable réelle x . On suppose cette fonction infiniment dérivable, c'est-à-dire que ses dérivées sont définies quelque soit l'ordre de dérivation. Un théorème mathématique établit que cette fonction « admet un développement limité au voisinage de $x = a$, quelque soit a ».

Cela signifie qu'autour du point $x = a$, il existe un « polynôme en $(x - a)$ » qui est une bonne approximation de la fonction $f(x)$. Plus le degré de ce polynôme est élevé, meilleure est l'approximation. Ce polynôme (ici donné pour un degré n quelconque) se calcule à l'aide de la formule de Taylor-Young :

$$f(x) = f(a) + (x-a) \frac{df}{dx}(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} \frac{d^2 f}{dx^2}(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} \frac{d^n f}{dx^n}(a)$$

Cette formule n'est pas à connaître (en physique de début d'année)

En bref, si la fonction $f(x)$ est connue, il est facile de trouver ce polynôme. Les polynômes étant des fonctions faciles à manier (intégrer, dériver), ce procédé consistant à « développer la fonction $f(x)$ sous la forme d'un polynôme » est très utilisé en physique (NB : on va rarement au-delà de $n = 2$).

1.2. Petites oscillations autour d'une position d'équilibre stable

On considère un point matériel soumis à des forces conservatives uniquement. On suppose qu'une seule coordonnée d'espace permet de repérer sa position, c'est un problème à un degré de liberté. On suppose que c'est une coordonnée cartésienne, que l'on nomme x .

On suppose aussi qu'une position d'équilibre stable existe, elle est repérée par $x = x_0$. L'énergie potentielle $E_p(x)$ admet donc un minimum en cette position. On étudie ici les **petites oscillations** du point matériel **autour de cette position d'équilibre**.

Grâce à un développement limité de $E_p(x)$ autour de x_0 et en appliquant le TEM, on trouve l'EDiff du mouvement.

Equation différentielle de l'oscillateur harmonique (OH)

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

*Vérifiée par les oscillateurs effectuant de petites oscillations conservatives autour d'une position d'EQ stable.
 ω_0 s'appelle la pulsation propre de l'oscillateur.*

Remarque :

- Seul l'ESSM permet de repérer l'EDiff d'un oscillateur harmonique. On verra bientôt que le second membre d'une EDiff dépend *de ce qui excite* l'oscillateur (la force des mains pour les oscillations d'une balançoire, le GBF pour les oscillations électriques)
- Lorsque l'oscillateur n'est pas excité, on dit qu'il effectue des « *oscillations libres* ». On peut alors toujours se ramener à un second membre nul (via un changement d'origine du repère en méca, par exple)

On notera qu'au voisinage de la position d'équilibre, la force conservative appliquée au système prend nécessairement la forme d'une *force de rappel élastique* (idem celle d'un ressort : force proportionnelle au déplacement).

On notera que l'on a effectué un développement limité pour établir l'équation différentielle de l'OH. L'oscillateur harmonique est donc un *modèle* issu d'une approximation. En se référant au diagramme d'énergie potentielle, on parle d'*approximation parabolique* du puit de potentiel autour de la position d'équilibre.

1.3. Exemple des petites oscillations du pendule

- Exprimer l'énergie potentielle du point M dans le cas du pendule.
- Sachant qu'au voisinage de $\theta = 0$, la fonction cosinus admet le développement limité suivant :

$$\cos(\theta) \sim 1 - \frac{\theta^2}{2}$$

simplifier l'expression de l'énergie potentielle. Pourquoi peut-on parler « d'approximation parabolique du puit de potentiel » ?

- En appliquant le TEM, montrer que le pendule aux petits angles est un oscillateur harmonique.
- Sachant qu'aux petits angles $\sin(\theta) \sim \theta$, montrer que la composante orthoradiale du poids (la « force projetée ») est bien de type *force de rappel élastique* (i.e. proportionnelle au déplacement angulaire θ).

1.4. Exemple des petites oscillations d'un point attaché à un ressort

- Dans le cas d'un ressort horizontal, a-t-on besoin de faire une « approximation parabolique du puit de potentiel » ?
- Les oscillations du ressort sont-elles toujours harmoniques, quelque soit leur amplitude ?

1.5. Définition de l'oscillateur harmonique : un oscillateur sinusoïdal

La solution de l'EDiff s'écrit sous deux formes équivalentes. Les constantes se déterminent à partir des C.I.

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) \quad (A, B \text{ constantes})$$

$$x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (X_m, \varphi \text{ constantes})$$

- Les oscillations sont donc sinusoïdales, de pulsation égale à la pulsation propre.
- La période des oscillations est égale à la période propre $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

C'est le caractère sinusoïdal des oscillations qui permet de définir un oscillateur harmonique : « Harmonique » n'est rien d'autre qu'un synonyme de « sinusoïdal ».

2. Etude du régime libre de l'oscillateur harmonique

2.1. Définition du régime libre de l'OH

Le régime libre de l'oscillateur harmonique correspond à la situation où aucune « force d'excitation » n'est appliquée au système au cours du mouvement. Cela se traduit par un second membre de l'équation différentielle nul ou constant. En choisissant une origine du repère centrée sur la position d'équilibre, on peut toujours se ramener à une ED dont le second membre est nul.

Pour étudier les oscillations libres du pendule, il suffit de le lâcher (avec ou sans vitesse initiale) et de le laisser évoluer *librement*. A l'inverse, on pourrait exciter l'oscillateur en le poussant régulièrement avec le doigt par exemple.

2.2. Etude énergétique de l'OH

On considère l'énergie cinétique, l'énergie potentielle et l'énergie mécanique. On a résolu l'équation différentielle du mouvement, donc $x(t)$ est connue. Par conséquent, l'expression des trois formes d'énergie en fonction du temps est connue. On retiendra que :

- L'énergie mécanique est constante, car l'évolution du système est conservative
- L'énergie mécanique est proportionnelle *au carré de l'amplitude des oscillations*
- Il y a échange périodique des formes cinétique et potentielle de l'énergie

2.3. Portrait de phase de l'OH

Concernant les trajectoires de phase d'un OH, on retiendra que :

- dans l'espace $\left(x, \frac{\dot{x}}{\omega_0}\right)$, ce sont des **cercles** centrés sur la position d'équilibre, de rayon X_m (amplitude)
- elles sont parcourues dans le *sens horaire*
- le mouvement de l'OH est réversible (les cercles sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses)

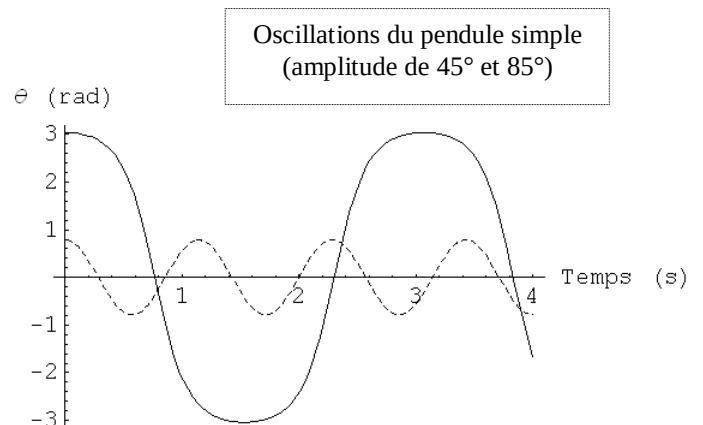
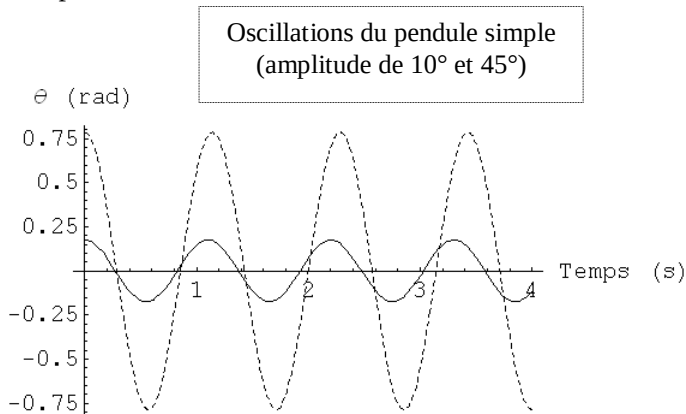
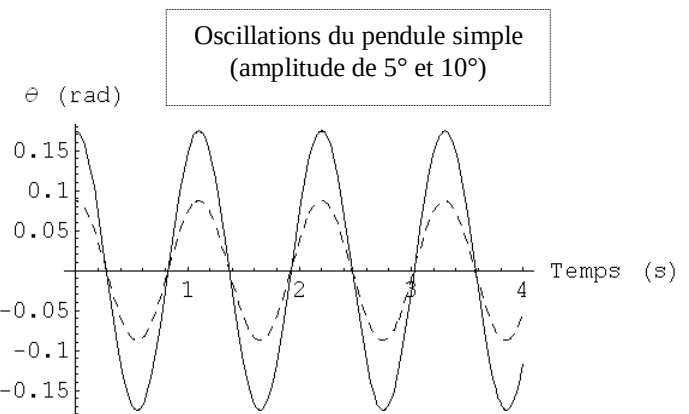
➤ Dans le cas des petites oscillations du pendule, montrer que les trajectoires de phases dans l'espace $\left(\theta, \frac{\dot{\theta}}{\omega_0}\right)$ sont des cercles. Préciser le centre et leur rayon.

2.4. Isochronisme des petites oscillations

Un système effectuant des oscillations de faible amplitude autour de sa position d'équilibre peut être décrit par le modèle de l'oscillateur harmonique.

Une conséquence importante du caractère harmonique des oscillations est que la *période d'oscillation ne dépend pas de l'amplitude des oscillations*. On parle de l'isochronisme des oscillations. On peut le vérifier sur la figure ci-contre.

Dans le cas du pendule simple, le caractère harmonique des oscillations n'est valable qu'aux petits angles. On peut remarquer sur la figure ci-dessous que la période augmente avec l'amplitude, si cette dernière dépasse 30° .



Sur la troisième figure, pour une très grande amplitude (proche de 90°), le caractère non sinusoïdal (on dit aussi *anharmonique*) des oscillations devient particulièrement flagrant.

3. Etude du régime libre de l'oscillateur harmonique amorti

3.1. Définition d'un OH amorti

Un oscillateur harmonique soumis à une force de frottement fluide devient un *oscillateur harmonique amorti*.

Dans toute la suite de cette section, on étudie l'exemple d'un point matériel lié à un ressort et se déplaçant sur un support horizontal. On néglige les forces de frottement solide, mais on tient compte des forces de frottement fluide.

- Etablir l'équation différentielle du mouvement.
- Par analogie avec les écritures canoniques introduites en électrocinétique, donner l'expression des variables réduites α , λ , Q et ω_0 dans le cas de l'OH amorti.

Remarque : Attention à ne pas se méprendre sur le sens de l'appellation « oscillateur harmonique amorti » ! Il est clair qu'un OH amorti n'est plus un oscillateur harmonique : ses oscillations ne sont plus sinusoïdales, à cause des frottements.

3.2. Résolution de l'équation différentielle : 3 types de régimes

- Trouver le critère sur le facteur de qualité Q qui permet de distinguer les trois types de régimes
- Idem avec le coefficient d'amortissement α .
- Discuter de l'allure des courbes (cf. cas du pendule amorti, courbes à la fin du polycopié)

On retiendra que les oscillations ne sont plus sinusoïdales : l'oscillateur harmonique amorti n'est plus un oscillateur harmonique.

3.3. Régimes pseudo-périodique : décrément logarithmique

- Rappeler la définition du décrément logarithmique dans le cas d'oscillations libres (centrées sur 0) : formule mathématique et schéma.

3.4. (Complément) Très faibles amortissements : interprétation énergétique de Q

Dans le cas des très faibles amortissements (frottements très faibles, $\alpha \ll 1$, $Q \gg 1$), on peut montrer que :

- E_m décroît exponentiellement avec le temps
- la variation relative de E_m sur une pseudo-période T , est inversement proportionnelle à Q :

$$\left(\frac{\Delta E_m}{E_m} \right) \approx \frac{2\pi}{Q}$$

La décroissance exponentielle de l'énergie mécanique avec le temps est illustrée sur les courbes représentées à la fin du polycopié.

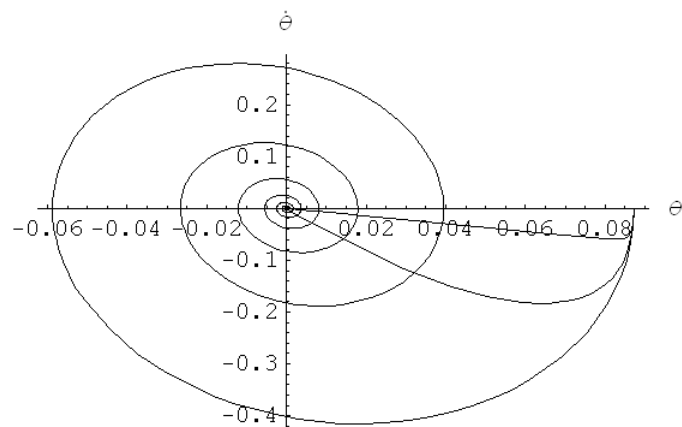
3.5. Portrait de phase d'un OH amorti

Sur la figure ci-contre sont représentées les trajectoires de phase du pendule simple soumis à des forces de frottement fluide :

- vitesse initiale nulle
- angle initial de 5°
- $\alpha = 4, 1$ et $1/8$

Le portrait de phase met très clairement en évidence l'influence des frottements sur les oscillations :

- Les trajectoires de phase ne sont pas des courbes fermées : le mouvement n'est plus périodique



- Le portrait de phase n'est plus symétrique par rapport à l'axe des abscisses : le mouvement n'est plus réversible
 - (Cas pseudo-périodique) L'amplitude des oscillations décroît avec le temps, et le système s'immobilise dans sa position d'équilibre stable. Cette position finale est « **un point attracteur** ».
 - (Cas critique et apériodique) Le pendule atteint le point attracteur sans osciller.
- Représenter le diagramme d'énergie potentielle en-dessous du portrait de phase, et expliquer qualitativement l'évolution de l'OH amorti sur ce diagramme

4. Analogies entre grandeurs électriques et mécaniques

En faisant le bilan des relations établies dans le cours d'électrocinétique et dans le présent chapitre, on remarque clairement une « *analogie formelle* » (i.e. purement mathématique) entre les grandeurs électriques et mécaniques. Un même formalisme, fondé sur l'établissement et la résolution d'équation différentielle, et fondé aussi sur le concept d'énergie, permet de décrire des situations physiques *a priori* très différentes.

Ces analogies ne signifient pas que les grandeurs électriques et mécaniques, mises en parallèle, « représentent la même chose ». Cela permet de prendre un peu de recul et de mémoriser plus simplement les relations établies dans ces deux parties du cours de physique.

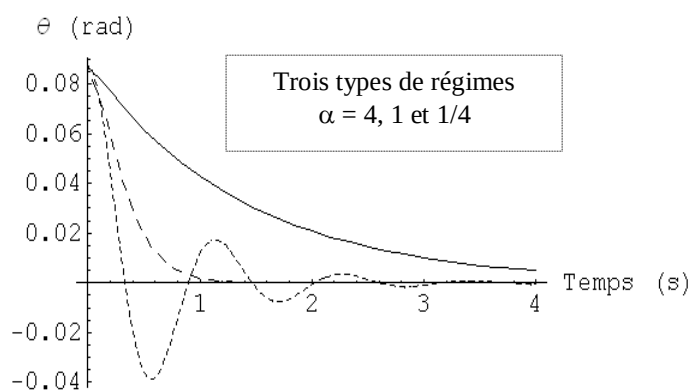
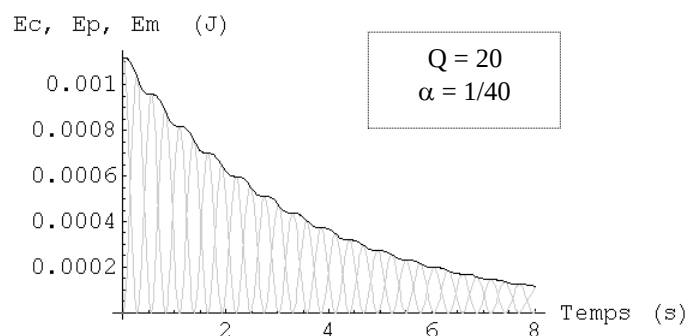
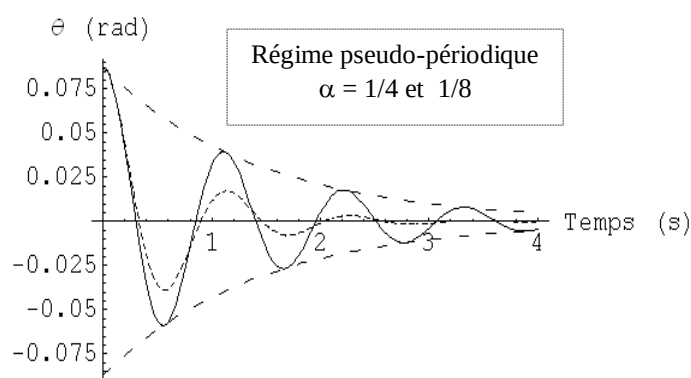
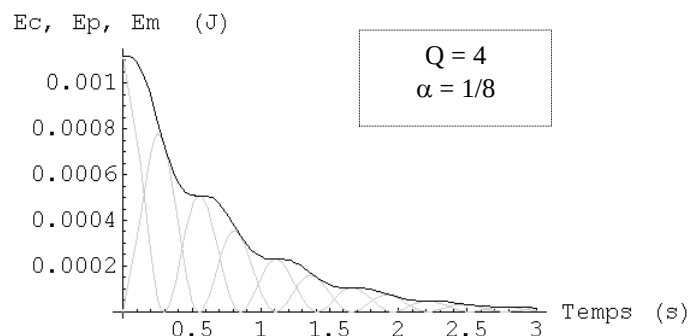
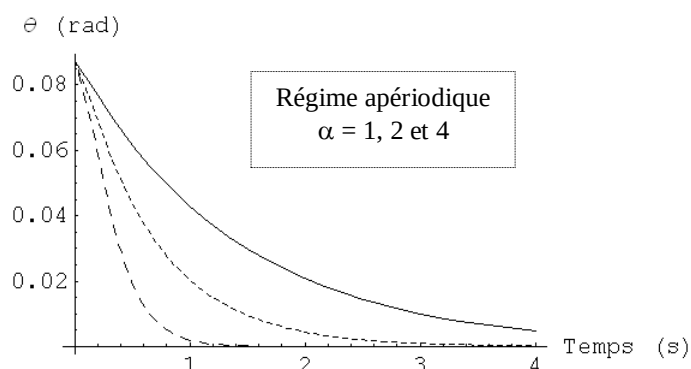
On retiendra particulièrement l'analogie entre résistance électrique et frottements fluides, tous deux représentatifs de l'amortissement des oscillations.

Tableau d'analogies entre un oscillateur à ressort (1 deg. liberté) et un circuit RLC série :

Grandeurs mécaniques	Grandeurs électriques	Commentaires
$\frac{h}{m}$	$\frac{R}{L}$	cf. équation différentielle
$\frac{k}{m}$	$\frac{1}{LC}$	cf. équation différentielle
$\frac{h}{m}$	$\frac{R}{L}$	<i>frottements</i> $\Leftrightarrow$ <i>résistance</i> : <i>amortissement</i>
$\frac{h}{m}$	$\frac{R}{L}$	<i>Inertie</i> (« <i>résistance</i> ») à la variation de v / i
$v = \frac{dx}{dt}$	$i = \frac{dq}{dt}$	vitesse du point M / intensité du débit de charge
x	q	position / charge
$F_{\text{fluid}} = -hv$	$u = Ri$	résistance / frottement
$P = Fv$	$P = ui$	définition puissance
$E_c = \frac{1}{2}mv^2$	$E_{\text{bob}} = \frac{1}{2}Li^2$	une forme d'E emmagasinée (vitesse point M / e^-)
$E_p = \frac{1}{2}kx^2$	$E_{\text{cond}} = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$	une autre forme d'E emmagasinée
$E_m = E_c + E_p$	$E_{\text{tot}} = E_{\text{bob}} + E_{\text{cond}}$	énergie totale emmagasinée
$P_{nc} = -hv^2$	$P_J = Ri^2$	représente la diminution de l'énergie totale emmagasinée

NB : Le caractère vectoriel de certaines équations mécaniques est volontairement omis pour plus de clarté

(Mathematica) **Pendule amorti avec $L = 30$ cm et $\theta_0 = 5^\circ$**



Notions clefs

Savoirs :

- Définition de l'OH et de l'OH amorti :
 - formes des équations différentielles (écritures canoniques)
 - formes des solutions (critère sur le discriminant pour les distinguer)
 - Allure des courbes représentant le mouvement en fonction du temps
- Définition du décrément logarithmique
- Interprétation énergétique du facteur de qualité (qualitativement seulement, pas de formules)
- Analogies entre grandeurs électriques et mécaniques (surtout frottement et résistance)

Savoirs faire :

- Lire et interpréter les portraits de phase de l'OH et de l'OH amorti
- Savoir refaire les exemples vus en cours (pas par cœur, il faut comprendre la méthode)