Exercices – Diffusion thermique

Si besoin, l'annexe « Analyse vectorielle » donne les expressions des opérateurs en cylindrique et sphérique
Dans tous les exercices suivants λ désigne une conductivité thermique, ρ une masse volumique et c une chaleur massique (capa. therm. mass.)

Exercice 1 : Diffusion thermique en présence d'effet Joule

Un cylindre métallique, de conductivité électrique σ et de conductivité thermique λ, de section S et de longueur L, est parcouru longitudinalement par un courant électrique d'intensité I. On suppose que les extrémités sont maintenues aux températures T_0 et T_1 et que la surface latérale est calorifugée.

1. Effectuer un bilan d'énergie pour établir l'équation de la chaleur, sachant que l'on adopte l'approximation d'un problème unidimensionnel.
2. En déduire la loi d'évolution spatiale de la température en fonction de l'abscisse en régime établi.
3. Examiner le cas particulier où I = 0. Examiner le cas particulier où $T_0 = T_1$. Tracer l'allure des courbes T(x) obtenues dans chacun de ces deux cas particuliers.
4. Calculer le flux thermique aux deux extrémités. Commenter le résultat.
5. Un tel problème aurait-il un sens dans le cadre de la diffusion de particules ?

Exercice 2 : Barreau constitué de deux métaux

On dispose d'un barreau cylindrique de section S constitué d'une longueur l_1 d'aluminium et l_2 de cuivre.

On donne :
λ_1 (Al) = 200 W.K^{-1}.m^{-1} ; λ_2 (Cu) = 380 W.K^{-1}.m^{-1} ; l_1 = 80 cm ; l_2 = 50 cm ; S = 2 cm^2.
L'extrémité libre du barreau d'aluminium est maintenue à t_1 = 180°C, celle du barreau de cuivre à t_2 = 0°C. Une gaine isole latéralement le barreau.
Déterminer, en régime stationnaire :
a) la température au niveau de la soudure ;
b) le gradient de température le long de chacune des deux parties du barreau ;
c) la densité de courant thermique et le transfert thermique qui traverse la jonction chaque minute.
d) La résistance thermique de l'ensemble.
Réponses : $T_{soudure}$ = 44,5 °C ; Q = 405,6 J.

Exercice 3 : Régulation thermique

On souhaite réguler la température d'une enceinte de stockage. Pour une température extérieure de 5°C, les calculs ont montré qu'une puissance de 1,6 kW était nécessaire pour maintenir la température intérieure à 18°C.

1. Déterminer et donner la valeur numérique de la résistance thermique de l'enceinte.
2. Pour une variation de température extérieure de 6°C, quelle sera la variation de température intérieure si l'on maintient la puissance thermique fournie constante ?

On adopte une loi de commande telle que la puissance fournie soit proportionnelle à la différence entre une valeur de consigne choisie par l'utilisateur et la température intérieure de l'enceinte.
3. Sachant que le coefficient retenu est de 1,5 kW par °C, quelle valeur de consigne faut-il choisir pour obtenir une température intérieure de 18°C lorsque la température extérieure est 5°C.
4. Si La température extérieure varie de 6°C, quelle sera la variation de température intérieure ? Commenter.

Exercice 4 : Bilan entropique en diffusion thermique (dur car non traité en cours, et hors programme)
- pour appliquer le 2[e] ppe
- pour prouver l'irréversibilité du phénomène de diffusion avec les outils de la thermodynamique
- pour donner un exemple d'évolution isentropique qui n'est pas adiabatique

Une barre cylindrique de conductivité λ, de section σ et de longueur L est calorifugée sauf à ses extrémités où elle est en contact avec deux thermostats qui maintiennent respectivement les températures T_1 et T_2.
En se plaçant en régime permanent, montrer que le phénomène de diffusion thermique est un processus irréversible, en reliant λ à l'entropie créée. Interpréter le fait que λ soit positif dans la loi de Fourier.

Exercice 5 : Etude simplifiée d'un dissipateur thermique pour transistor

On ne peut pas toujours limiter la puissance dissipée dans un transistor. Pour pouvoir dissiper une puissance beaucoup plus élevée en limitant la température du composant, on monte le boîtier de certains transistors sur un dissipateur de chaleur muni d'ailettes de refroidissement (figure 10).

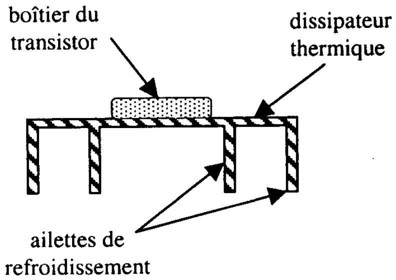

figure 10

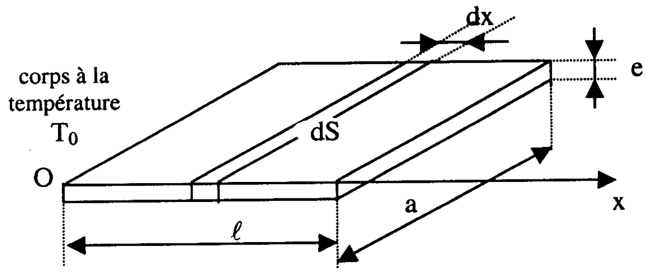

figure 11

Une ailette de refroidissement en aluminium de conductivité thermique $\lambda = 200\ \mathrm{W\ m^{-1}.K^{-1}}$ est fixée à un corps dont la température est $T_o = 70°C$ constante et baigne dans l'air ambiant dont la température est constante et vaut $T_a = 20°C$.
Le corps à la température T_o occupe le demi-espace $x < 0$. L'ailette est de forme parallélépipédique (figure 11), d'épaisseur e = 2 mm, de largeur a = 3 cm et de longueur ℓ=2 cm.

On fait les hypothèses suivantes :
- le régime étudié est stationnaire
- la température d'un point de l'ailette n'est fonction que de x : elle sera donc notée T(x)
- a est très grand devant e (cf. valeurs numériques)
- la puissance thermique cédée à l'air extérieur par la surface latérale dS d'un élément de longueur dx (échanges conducto-convectifs) est : $dP = h\,[\,T(x) - T_a]\,dS$ avec $dS = 2\,(a + e).dx \approx 2a.dx$
où h est un coefficient constant : h = 150 S.I. (S.I. signifie : dans le système international).

1. Montrer que l'équation différentielle vérifiée par la température T(x) de l'ailette peut se mettre sous la forme :
$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{1}{L^2}\left(T(x) - T_a\right) = 0$$
où L est une longueur caractéristique que l'on exprimera en fonction de λ, h et e.
2. Calculer la valeur numérique de L.
3. Justifier les deux conditions aux limites suivantes vérifiées par T(x) :
$$T(0) = T_o \text{ et } -\lambda\left(dT/dx\right)_{x=\ell} = h\,(T(\ell) - T_a)\ .$$
4. En déduire la loi T(x) en fonction de x.
5. Montrer que compte-tenu de la longueur de l'ailette (ℓ= 2 cm), on peut supposer que la température de l'ailette est approximativement constante et égale à T_o : on montrera que la valeur absolue de $(T(\ell) - T_o) / T_o$ est voisine de 10%.
6. <u>On considère que la température de l' ailette est effectivement constante et égale à T_o</u>
a) Donner l'expression de la puissance thermique P échangée entre l'ailette et l'air ambiant.
b) Déterminer la puissance thermique P' échangée entre le corps à la température T_o et l'air ambiant par la surface d'aire S' = a.e en l'absence d'ailette (S' est la surface de base de l'ailette en x = 0).
c) En déduire l'expression de l'efficacité $\eta = P / P'$ de l'ailette. Calculer sa valeur.

Exercice 6 : Est-il toujours efficace d'ajouter un isolant autour d'une conduite ? **(CCP MP 2015)**

Après avoir transité dans l'échangeur thermique, l'eau alimente le réseau d'une habitation. Afin de limiter les pertes thermiques dans les canalisations, on se propose, dans cette partie, d'étudier quelques solutions d'isolation thermique.

La canalisation est cylindrique, d'axe Oz, de rayon r_i et de longueur $L \gg r_i$. L'eau y circulant est à la température T_i. L'objectif de cette partie est de comparer les pertes latérales de la canalisation sans ou avec un isolant.

On adopte le modèle suivant :

- seule la conduction thermique radiale, c'est-à-dire dans une direction perpendiculaire à l'axe Oz, est prise en compte. On néglige donc la conduction selon l'axe Oz ;
- la température de l'eau dans la canalisation est supposée uniforme. La conduction radiale s'opère donc pour $r \geq r_i$ uniquement ;
- l'étude est menée en régime stationnaire ;
- on néglige l'épaisseur de la paroi de la canalisation.

Sans isolant (figure 9, page 14), la canalisation est en contact avec l'air intérieur de l'habitation, de température T_0.

II.6. La densité surfacique de puissance thermique échangée par transfert conducto-convectif au niveau de la surface latérale de la canalisation est donnée par $\vec{j_Q} = h\,(T_i - T_0)\,\vec{u_r}$ (loi de Newton), où h est une constante dimensionnée appelée coefficient d'échange et $\vec{u_r}$ le vecteur unitaire radial de la base cylindrique. Exprimer la puissance thermique P_{th} transférée au niveau de la surface latérale du système.

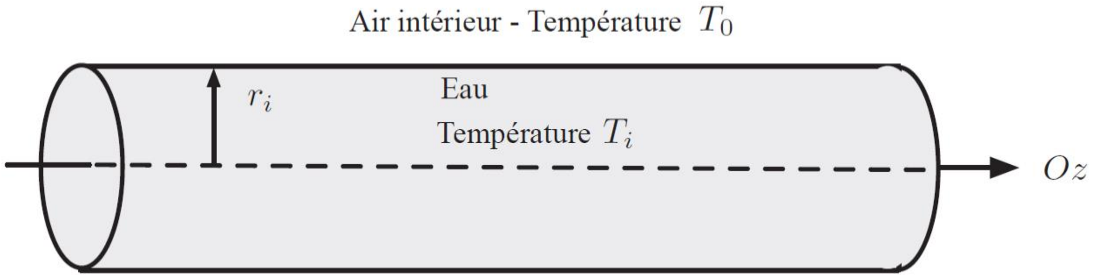

FIGURE 9 – Canalisation sans isolant.

On applique désormais un isolant thermique sur la canalisation précédente. L'isolant possède un rayon intérieur r_i et un rayon extérieur r_e (voir figure 10). En un point situé à une distance r de l'axe Oz et situé à l'intérieur de l'isolant, c'est-à-dire pour $r_i \leq r \leq r_e$ en repérage cylindrique, la température est notée $T(r)$. On note $T_e = T(r_e)$ et $T_i = T(r_i)$.

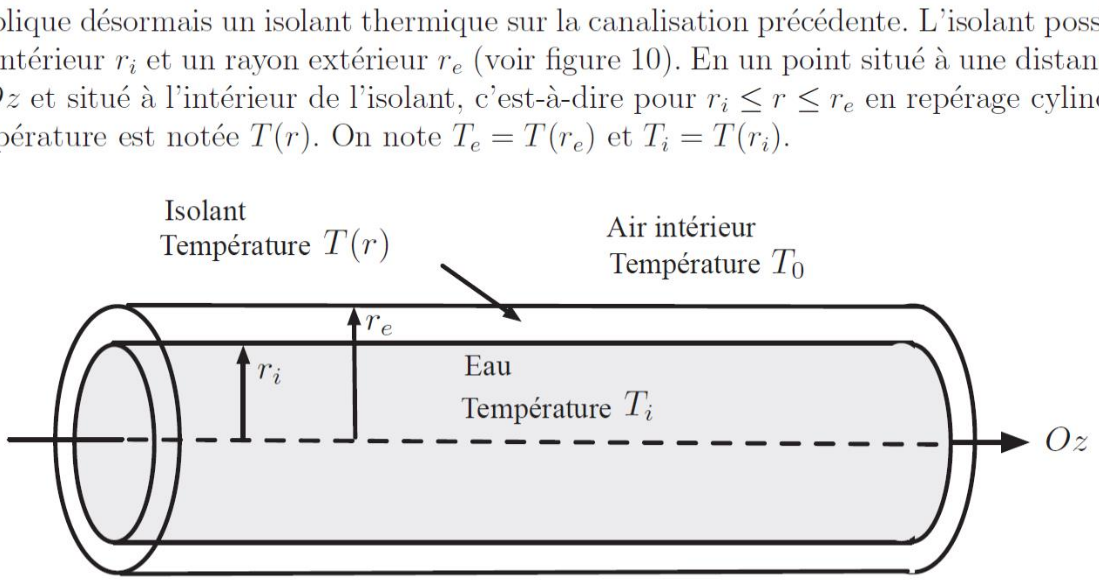

FIGURE 10 – Canalisation avec isolant.

Dans la suite, l'échange conducto-convectif au niveau de la surface intérieure de l'isolant n'est pas pris en compte.

La température de part et d'autre de la surface intérieure de l'isolant est continue : $T(r_i^-) = T(r_i^+) = T_i$.

II.7. On suppose que le coefficient d'échange en $r = r_e$ est h. Exprimer la puissance thermique $P_{th,isolant}$ échangée au niveau de la surface latérale extérieure de l'isolant par conduction-convection en fonction de h, T_0, T_e, L et r_e.

II.8. On note $P_{cond}(r)$ la puissance thermique associée au phénomène de conduction thermique dans l'isolant, traversant un cylindre de longueur L et de rayon r tel que $r_i \leq r \leq r_e$. Nous allons établir et exploiter le lien entre $P_{th,isolant}$ et $P_{cond}(r)$.

II.8.a. En effectuant un bilan d'énergie interne sur un cylindre de longueur L, de rayons interne r et externe $r + dr$ tels que $r_i \leq r < r + dr \leq r_e$ (avec $dr \ll r$), montrer qu'en régime stationnaire $P_{cond}(r)$ est indépendante de r, soit : $\dfrac{dP_{cond}(r)}{dr} = 0$.

II.8.b. En déduire que : $P_{cond}(r) = P_{th,isolant}$.

II.8.c. Rappeler l'expression de la loi de Fourier relative à la conduction thermique en exprimant le vecteur densité surfacique de flux de conduction thermique $\vec{j}_{cond}(r) = j_{cond}(r)\,\vec{u_r}$ en fonction notamment de la conductivité thermique de l'isolant, λ, supposée uniforme. Exprimer ensuite la puissance thermique associé, $P_{cond}(r)$.

<u>Donnée</u> : en repérage cylindrique : $\overrightarrow{\text{grad}}\,(f(r)) = \dfrac{df(r)}{dr}\,\vec{u_r}$.

II.8.d. Déduire des questions précédentes que : $\dfrac{dT}{dr} = \dfrac{h\,r_e}{\lambda\,r}\,(T_0 - T_e)$.

II.8.e. En déduire l'expression de $T(r)$.

II.8.f. En déduire que : $T_e = T_0 + \dfrac{T_i - T_0}{1 + \dfrac{h\,r_e}{\lambda}\ln\left(\dfrac{r_e}{r_i}\right)}$.

II.9. Montrer que : $\dfrac{P_{th}}{P_{th,isolant}} = \dfrac{1}{x} + \alpha\ln(x)$, avec $x = \dfrac{r_e}{r_i}$ et α à exprimer en fonction de h, r_i et λ.

On envisage deux solutions d'isolation différentes. On donne pour chacune d'elles : $h = 3,0\,\text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$ et $r_i = 2,0$ cm.

— <u>Solution d'isolation n° 1</u> : l'isolant est du polyuréthane, de conductivité thermique : $\lambda_1 = 0,025\,\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$.
Le graphe de $\dfrac{1}{x} + \alpha\ln(x)$ en fonction de x est représenté sur la figure 11 ci-dessous pour la valeur de α correspondante.

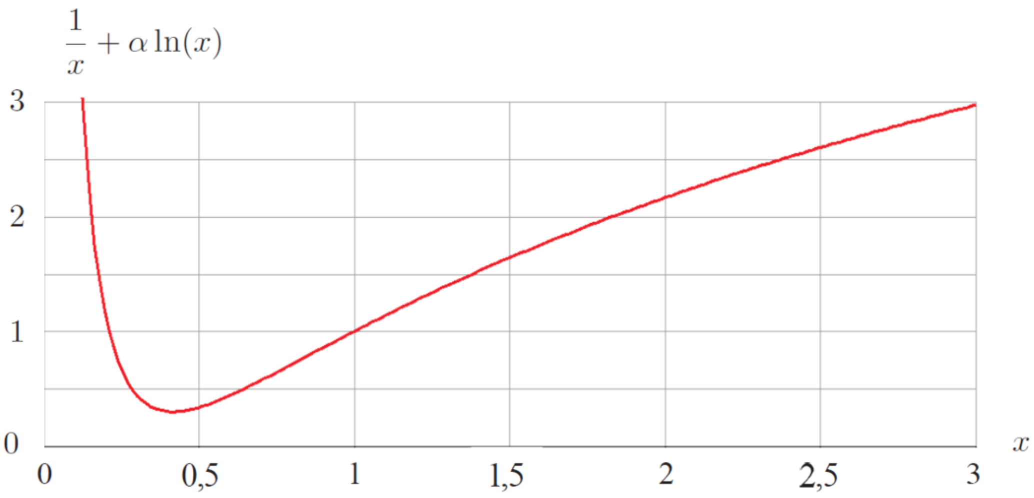

FIGURE 11 – Graphe de la fonction $\frac{1}{x}+\alpha \ln(x)$ fonction de x pour la valeur de α du polyuréthane.

— <u>Solution d'isolation n° 2</u> : l'isolant est du plâtre, de conductivité thermique λ_2.
Le graphe de $\frac{1}{x} + \alpha \ln(x)$ en fonction de x est représenté sur la figure 12 (page 16) pour la valeur de α correspondante. L'encart représente un agrandissement pour $0 \leq x \leq 8$.

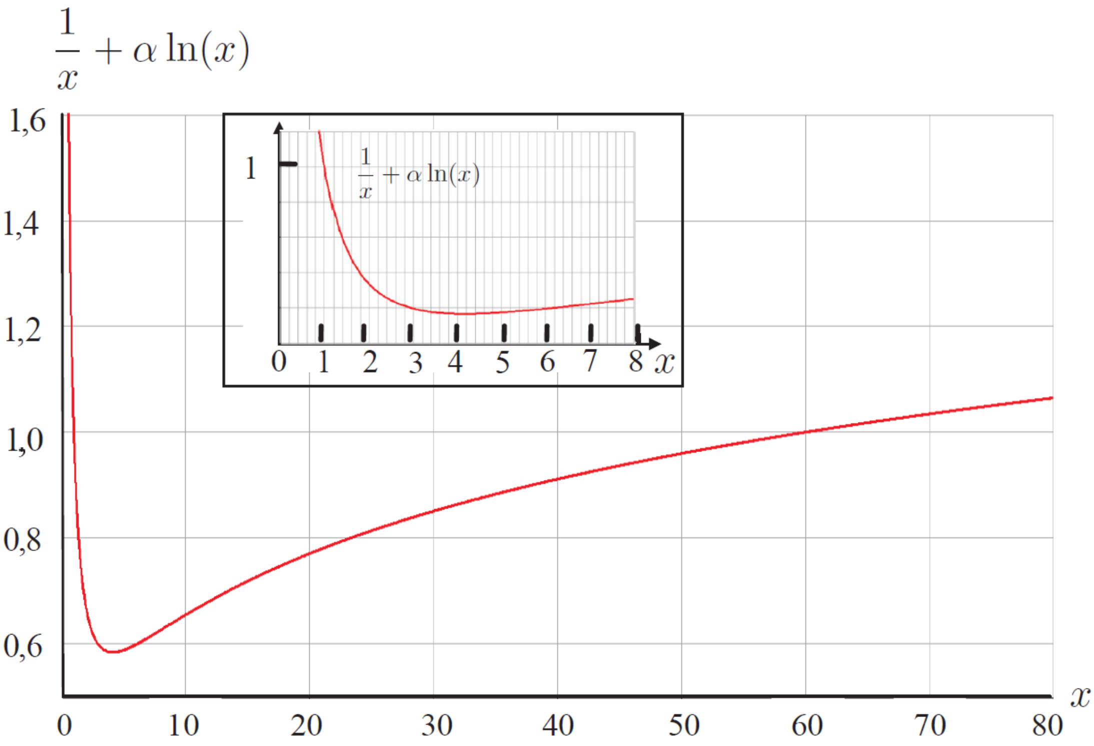

FIGURE 12 – Graphe de la fonction $\frac{1}{x} + \alpha \ln(x)$ fonction de x pour la valeur de α du plâtre.

II.10. En vous appuyant sur les graphes des figures 11 et 12, répondre de façon argumentée aux questions suivantes :

II.10.a. Est-il toujours efficace d'isoler avec du polyuréthane ?

II.10.b. Est-il toujours efficace d'isoler avec du plâtre ? Le cas échéant, déterminer à partir de quelle valeur de r_e l'isolation au plâtre devient efficace et commenter.

II.10.c. Pour quelle valeur x_m de x la fonction $x \to \frac{1}{x} + \alpha \ln(x)$ admet-elle un minimum ?

II.10.d. En déduire la valeur numérique de la conductivité thermique du plâtre λ_2.