Chap.3 – Circulation du champ électrostatique – Potentiel, et énergie potentielle électrostatique

Intro :
On introduit dans ce chapitre deux notions mathématiques importantes : *le gradient d'un champ scalaire*, ainsi que *la circulation d'un champ vectoriel*. Ces notions de math vont nous permettre d'expliciter le lien général entre une force conservative et l'énergie potentielle associée.

Dans le cas du champ électrostatique, la notion de gradient permet de définir le *potentiel électrostatique*, dont on verra qu'il s'identifie au « potentiel électrique » défini en électrocinétique.

1. Notions de gradient, et de circulation d'un champ vectoriel

On définit ici la notion de *gradient d'un champ scalaire*, et la notion de *circulation d'un champ vectoriel*. Ces notions mathématiques vont nous permettre dans un premier temps d'expliciter la notion de *force conservative* et *d'énergie potentielle* associée. Elles nous permettront par la suite de comprendre enfin ce qu'est une *tension* en électrocinétique, en définissant la notion de *potentiel électrique*.

1.1. Gradient d'un champ scalaire

Soit une fonction scalaire de la position $g(M)$, définie en tout point M d'une région de l'espace 3D. On définit alors un repère cartésien $(O;\overrightarrow{u_x},\overrightarrow{u_y},\overrightarrow{u_z})$ pour repérer la position d'un point $M(x,y,z)$ quelconque.

- Exprimer la différentielle de $g(x,y,z)$ en fonction de ses dérivées partielles.
- Exprimer le déplacement élémentaire $\overrightarrow{dOM}$ en fonction des coordonnées.

On remarque alors que l'on peut exprimer la différentielle de g sous la forme :

$$\boldsymbol{dg \overset{\text{def}}{=} \overrightarrow{grad}(g)\cdot\overrightarrow{dOM}}$$

Cette relation définit ***le gradient de la fonction g***

Le gradient est un opérateur qui, à un champ scalaire $g(M)$, fait correspondre un champ vectoriel $\overrightarrow{grad}(g)$, défini en cartésien par :

$$\overrightarrow{grad}(g)=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y,z)\\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y,z)\\ \dfrac{\partial g}{\partial z}(x,y,z)\end{bmatrix}$$

les dérivées partielles étant évaluées en $M(x,y,z)$. Le gradient de la fonction g est une fonction vectorielle des coordonnées d'espace.

- Par un raisonnement similaire, établir l'expression du gradient de g en coordonnées cylindriques et sphériques.

$$\overrightarrow{grad}(g)=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta,z)\\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta,z)\\ \dfrac{\partial g}{\partial z}(r,\theta,z)\end{bmatrix}\qquad \overrightarrow{grad}(g)=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta,\varphi)\\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta,\varphi)\\ \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial g}{\partial \varphi}(r,\theta,\varphi)\end{bmatrix}$$

Remarque :
On retiendra que le gradient est un opérateur linéaire : le gradient de la somme de deux fonctions est la somme des gradients de chacune des fonctions.
En notant a une constante (de la position), on a aussi $\overrightarrow{grad}(a\times g)=a\times\overrightarrow{grad}(g)$

1.2. Circulation d'un champ vectoriel le long d'une courbe orientée

Courbe orientée
Soit une courbe Γ de l'espace 3D. C'est une figure géométrique unidimensionnelle, une « ligne » pas nécessairement rectiligne. Pour orienter cette courbe, et définir ainsi une *courbe orientée*, il faut se donner un *sens de parcours* le long de cette courbe.

Localement, en un point M sur cette courbe, le sens de parcours est donné par le vecteur *déplacement élémentaire* $\overrightarrow{d\ell}$: c'est un vecteur unitaire, localement tangent à la courbe au point M. Si l'on se donne un point O quelconque dans l'espace pour repérer la position du point M : $\overrightarrow{d\ell}=\overrightarrow{dOM}$. Ce vecteur représente le déplacement élémentaire du point M le long de cette courbe :

- Sa direction est celle de la tangente à la courbe en M
- Son sens défini le sens de parcours le long de la courbe

On choisit bien-sûr un sens de parcours identique tout le long de la courbe Γ.

Circulation d'un champ vectoriel le long d'une courbe orientée

Soit une courbe orientée *Γ*. Soit un champ vectoriel $\vec{a}(M)$ défini en tout point de cette courbe.

Définition de la circulation élémentaire d'un champ vectoriel $\vec{a}$ en un point M d'une courbe orientée

$$\delta C \stackrel{\text{def}}{=} \vec{a}(M) \cdot \overrightarrow{dOM}$$

La circulation élémentaire du champ vectoriel au point *M* est un scalaire algébrique :

- Si la composante du champ le long de la courbe est orientée dans le même sens que la courbe, la circulation élémentaire est positive ;
- Sinon la circulation élémentaire est négative ;
- Si le champ est localement orthogonal à la courbe, la circulation élémentaire est nulle.

On peut alors définir ***la circulation C du champ $\vec{a}$ le long de la courbe orientée*** Γ, somme des circulations élémentaires le long de le courbe, *selon son sens d'orientation* :

$$C \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Gamma} \delta C$$

$$\boldsymbol{C = \int_{M \epsilon \Gamma} \vec{a}\,(M) \cdot \overrightarrow{dOM}}$$

Si la courbe orientée est une *courbe fermée*, on note la circulation du champ :

$$C = \oint_{\mathrm{M}\epsilon\Gamma} \vec{a}\,(M) \cdot \overrightarrow{dOM}$$

1.3. Un champ vectoriel à circulation conservative est le gradient d'un champ scalaire

Champ vectoriel à circulation conservative

Un champ vectoriel est dit ***à circulation conservative*** si, pour tout couple de points *A* et *B* de l'espace, la circulation du champ le long d'une courbe reliant les points *A* et *B* ***ne dépend pas de la courbe choisie*** pour relier ces deux points : on dit que la circulation du champ est ***indépendante du chemin suivi***. On note alors :

$$C = \int_{M=A}^{M=B} \vec{a}\,(M) \cdot \overrightarrow{dOM}$$

Il est équivalent de dire qu'un *champ vectoriel à circulation conservative* est un champ dont la *circulation sur un contour fermé est nulle* :

$$\boldsymbol{\oint_{\mathrm{M}\epsilon\Gamma} \vec{a}\,(M) \cdot \overrightarrow{dOM} = 0}$$

Ce type de champ vectoriel est le gradient d'un champ scalaire

Pour un champ vectoriel $\vec{a}(M)$ ***à circulation conservative****, il existe* ***un champ scalaire $g(M)$*** *tel que :*

$$\boldsymbol{\vec{a}(M) = -\overrightarrow{grad}_M(g)}$$

On dit aussi qu'un champ vectoriel à circulation conservative est un « champ de gradient ».

1.4. Exemple : une force conservative est un gradient d'énergie potentielle

On fait le lien entre ces nouvelles notions math et la notion de *force conservative* et *d'énergie potentielle* associée.

➢ Associer une des nouvelles notions mathématiques au travail d'une force appliquée à un point matériel le long de son trajet entre deux points *A* et *B*.

- Justifier l'appellation « force conservative » grâce aux nouvelles notions mathématiques introduites.

- Donner l'expression générale reliant un champ de force et l'énergie potentielle associée. En déduire :
  - l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur
  - la relation entre la composante radiale d'un CFCC et l'énergie potentielle associée

> ***Pour toute force conservative****, on peut* ***définir*** *une fonction scalaire de la position*
> *–* ***l'énergie potentielle*** $\boldsymbol{E_p(M)}$ *– par la relation :*
>
> $$\boldsymbol{\vec{F}(M) = -\overrightarrow{grad}_M(E_p)}$$

1.5. Energie potentielle électrostatique d'une charge soumise à un champ électrique

On considère une charge électrique ponctuelle q_2, située en un point M de l'espace, et soumise au champ électrostatique créé par une charge ponctuelle q_1 placée en un point P.

- Etablir l'expression de l'énergie potentielle $U(M)$ de la charge q_2 dans le champ de force électrostatique généré par la charge q_1.

- Déterminer la constante d'intégration en prenant conventionnellement l'énergie nulle à l'infini.

> ***L'énergie potentielle*** *électrostatique* ***d'une charge*** $\boldsymbol{q_2}$ *placée en* M
> *et soumise au champ* ***créé par une charge*** $\boldsymbol{q_1}$ *placée en* P *s'écrit :*
>
> $$\boldsymbol{U_{q_2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0\,(PM)}}$$
>
> *(La constante d'intégration est nulle si l'on prend l'énergie nulle lorsque $PM \rightarrow \infty$)*

Dans le cas d'un champ créé par une distribution de charge quelconque, l'énergie potentielle de la charge q_2 soumise à ce champ est toujours donnée par la relation $\overrightarrow{F_{\rightarrow 2}} = -\overrightarrow{grad}(U_{q_2})$. On ne donne pas tout de suite l'expression générale de l'énergie potentielle dans le cas d'un champ créé par une distribution quelconque. On introduit d'abord la notion de *potentiel électrostatique*.

2. Potentiel électrostatique

Dans les chapitres précédents, on a défini le champ électrostatique créé en un point *M* par une distribution de charge, à partir de la force de Coulomb exercée sur une charge ponctuelle « fictive » placée en *M*.

De manière similaire, on va définir le *potentiel électrostatique créé en un point M* à partir de l'énergie potentielle d'une charge « fictive » placée en *M*.

2.1. Définition générale du potentiel électrostatique

> On définit ***le potentiel électrostatique*** $\boldsymbol{V(M)}$ *créé en un point* M *par une distribution de charge*
> à partir du champ électrostatique créé par cette distribution :
>
> $$\boldsymbol{\vec{E}(M) \stackrel{\text{def}}{=} -\overrightarrow{grad}_M(V)}$$
>
> On parle de ***relation 'locale'*** entre potentiel et champ (dérivées ↔ variations élémentaires, locales)
> **Le champ électrostatique** est donc ***un champ à circulation conservative***.
> L'unité du champ électrostatique est donc bien le $V.m^{-1}$.

La circulation du champ électrostatique entre deux points A *et* B
est reliée à la différence de potentiel entre ces deux points :

$$\int_{M=A}^{M=B} \vec{E}(M) \cdot \overrightarrow{dOM} = V(A) - V(B)$$

On parle de ***relation 'intégrale'*** entre potentiel et champ.
Si *A* et *B* sont *confondus*, alors la *différence de potentielle est nulle*.

- Deux plaques horizontales se font face, sont distantes de D et sont chargées. L'une se situe à une altitude repérée par un point A, l'autre par un point B. Grâce à un générateur, on applique une différence de potentiel $V(A) - V(B)$ entre les plaques. On suppose que le champ électrique créé par ces plaques entre l'espace qui les sépare est uniforme. En déduire l'expression du champ en fonction des données.

On peut donner une autre définition, équivalente à la première. On admettra cette équivalence.

On définit ***le potentiel électrostatique*** $V(M)$ *créé en un point* M *par une distribution de charge* à partir de l'énergie potentielle U_q d'une charge ponctuelle **« fictive »** q **placée en M** :

$$U_q \stackrel{\text{def}}{\equiv} qV(M)$$

L'unité du potentiel électrique est le *volt*.

Théorème de superposition

On a montré que le champ électrostatique est une grandeur *additive* : le champ total créé par une distribution est la somme des champs créés par chaque partie de la distribution. On parle de *Théorème de superposition*, qui provient simplement du fait que la force de Coulomb est additive.

D'après la (deuxième) définition du potentiel électrostatique, il est clair que le **Théorème de superposition est aussi valable pour le potentiel**, puisque le gradient est un opérateur linéaire : *le potentiel total créé par une distribution est la somme des potentiels créés par chaque partie de la distribution*.

2.2. Expression du potentiel créé par une charge ponctuelle

- A partir de la première définition du potentiel, établir l'expression du potentiel créé par une charge ponctuelle en fonction de la position du point *M*.

- Faire de même à partir de la deuxième définition après avoir exprimé le champ en coo. sphériques

Le potentiel électrostatique *créé en* M ***par une charge*** q_1 *placée en* P *s'écrit :*

$$V(M) = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0\, PM}$$

(La constante d'intégration est nulle si le potentiel est pris nul lorsque PM → ∞)

On remarque que le potentiel électrostatique est défini partout dans l'espace *sauf au point P où se situe la charge qui le génère*.

On remarque que le potentiel décroît en 1/r, alors que le champ décroît en 1/r².

2.3. Expression du potentiel créé par une distribution discrète, d'extension finie

Dans le cas de N particules chargées, le potentiel généré en point M de l'espace s'écrit (superposition) :

$$V(M) = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0\, P_iM} + C^{te}$$

Le potentiel n'est pas défini en tout point où se situent les charges.
On admet que cette expression n'est valable que si la distribution est *d'extension finie* (nombre fini de charges).

2.4. Expression du potentiel créé par une distribution continue, d'extension finie

Dans le cas d'une distribution continue (linéique, ou surfacique, ou volumique), et ***d'extension finie***, le théorème de superposition nous permet d'écrire :

$$V(M) = \iiint_{P\in V} \frac{\rho(P)d\tau}{4\pi\varepsilon_0\, PM} + C^{te}$$

$$V(M) = \iint_{P\in S} \frac{\sigma(P)dS}{4\pi\varepsilon_0\, PM} + C^{te}$$

$$V(M) = \int_{P\in\Gamma} \frac{\lambda(P)d\ell}{4\pi\varepsilon_0\, PM} + C^{te}$$

On admettra que le potentiel électrique est ***défini et continu en tout point de l'espace dans le cas des distributions volumiques et surfaciques***.

Il n'est pas défini en tout point d'une distribution *linéique* de charge. On le vérifiera sur des exemples de distribution.

2.5. Invariances et symétries du potentiel

Par un raisonnement similaire à celui tenu pour le champ électrostatique, le potentiel possède les mêmes invariances que la distribution de charge qui en est la cause. On rappelle que les invariances permettent de déterminer la dépendance du potentiel avec la position du point M où il est évalué.

Si la distribution admet un plan de **symétrie** :

$$M' = sym_{\Pi}[M]$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{V(M) = V(M')}$$

Si la distribution admet un plan **d'antisymétrie**, on a :

$$M' = sym_{\Pi_a}[M]$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{V(M') = -V(M)}$$

2.6. Méthodes de calcul du potentiel – Exemples

On peut déterminer le potentiel créé par une distribution de charge de deux manières différentes.

Calcul à partir du champ électrostatique *(à préférer, si possible)*

Si le champ électrostatique est facile à déterminer (à l'aide du Th. de Gauss par exemple), on peut utiliser la relation locale entre champ et potentiel.

1. Calcul du champ électrostatique par la méthode de Gauss. On a donc l'expression du gradient du potentiel
2. Les dérivées partielles étant connues, on intègre (primitive) pour déterminer le potentiel. On détermine la constante d'intégration en choisissant une valeur arbitraire du potentiel en un point de l'espace.
3. Invoquer la continuité du potentiel en tout point de l'espace dans le cas de distributions volumiques et surfaciques, afin de déterminer une ou plusieurs constantes d'intégration.

Calcul direct à partir des expressions intégrales *(distribution d'extension finie uniquement)*

Si le champ ne peut pas être calculé facilement, on peut effectuer le calcul direct (expressions intégrales) sur le potentiel plutôt que sur le champ. En effet, intégrer des fonctions scalaires est souvent plus simple que d'intégrer des fonctions vectorielles.

1. Repérer les symétries et invariances de la distribution de charge. En déduire la dépendance du potentiel avec les coordonnées de position.
2. Calcul direct du potentiel à partir des expressions intégrales données ci-dessus.
3. En déduire le champ électrostatique (si demandé) en calculant le gradient du potentiel.

Exemples :

- Calculer le potentiel créé par un fil rectiligne infini uniformément chargé.
- Idem pour un plan infini uniformément chargé.
- Idem pour une sphère uniformément chargé

NB : On remarque que le potentiel n'est pas défini en tout point d'une distribution *linéique*. Par contre, il est défini en tout point d'une distribution *surfacique,* contrairement au champ.

2.7. Lien avec l'électrocinétique : qu'est-ce qu'une tension ?

Dans le cas simple d'un résistor, on fait le lien entre la notion de tension définie en électrocinétique et la notion de potentiel électrique que l'on a défini dans le présent chapitre. On assimile le résistor à un métal parallélépipédique de longueur L et de section S.

On admet que l'intérieur du conducteur est assimilable au vide dans lequel circulent les électrons libres. On admet que le générateur auquel est branché le résistor génère un champ électrostatique uniforme à l'intérieur du résistor, et le champ est dirigé le long du résistor.

- c'est le champ électrostatique généré par le générateur qui met en mouvement les électrons : c'est l'explication *mécanique* de l'existence du courant dans un résistor relié à un générateur ;
- la tension aux bornes du résistor est une *différence de potentiel électrostatique*. Elle est reliée au champ électrostatique qui met en mouvement les électrons : on comprend maintenant la signification physique du « potentiel », que l'on avait mentionné en électrocinétique sans en comprendre l'origine physique microscopique ;
- dans un résistor, les électrons « remontent » le long du potentiel ; le courant le « descend » donc.

Remarque : En présence du phénomène d'induction magnétique (spé), la tension entre deux points d'un circuit se définit comme la circulation du champ électrique entre ces deux points (le champ électrique n'est alors plus à circulation conservative, et la tension n'est plus assimilable à une différence de potentiel).

3. Compléments : l'opérateur gradient dans le cours de physique de sup

Relation entre force conservative et énergie potentielle
On a montré que la notion de gradient est directement impliquée dans la définition de l'énergie potentielle associée à une force conservative.

Statique des fluides
On peut aussi reformuler la relation fondamentale de la statique des fluides à l'aide de l'opérateur gradient.

- Reformuler la relation de la statique des fluides sous forme vectorielle en utilisant l'opérateur gradient.

Notions clefs

Savoirs :
Connaissances générales
- Définition du gradient d'un champ scalaire + expressions dans les 3 systèmes de coordonnées
- Définition de la circulation d'un champ vectoriel le long d'une courbe orientée
- Définition d'un champ vectoriel à circulation conservative
- Pour ce type de champ vectoriel, on peut définir un champ scalaire dont le champ vectoriel est le gradient
- Définition de l'énergie potentielle à l'aide du gradient (relation entre force et énergie potentielle)

Connaissances spécifiques à l'électrostatique
- Définitions du potentiel électrostatique : *surtout la deuxième !!* (relation locale potentiel-champ)
- Relation entre différence de potentiel et circulation du champ électrostatique
- Expression intégrale du potentiel électrostatique (pour tout type de distribution *d'extension finie !!*)
- Invariances et symétries du potentiel

Savoirs faire :
- Déterminer le potentiel créé par une distribution de charge (surtout avec la première méthode)
- Utiliser l'opérateur gradient pour trouver l'expression de l'énergie potentielle d'une force conservative