

Cinématique

Prérequis

Produit scalaire. Équations différentielles d'ordre 1. Projections de vecteurs.

Déplacements rectilignes



Entraînement 10.1 — Distance et temps de parcours.



Une voiture se déplace en ligne droite à $90 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

Toutes les réponses seront exprimées en « heures-minutes-secondes », par exemple « 2 h 32 min 12 s ».

a) Combien de temps faut-il à cette voiture pour parcourir 100 km ?

b) Quel serait l'allongement du temps de trajet si elle roulait à $80 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$?



Entraînement 10.2 — Distance parcourue.



Une voiture se déplace en ligne droite. Initialement à l'arrêt, elle subit une accélération constante valant a_0 pendant une durée τ_1 , puis continue à vitesse constante pendant une durée τ_2 .

a) Quelle est la vitesse v_1 du véhicule à la date $t = \tau_1$?

b) Quelle est la distance parcourue durant τ_1 ?

c) Quelle est la distance totale parcourue en fonction de a_0 , τ_1 et τ_2 ?



Entraînement 10.3 — Longueur d'une piste de décollage.



Pour décoller, un avion doit atteindre la vitesse $v_d = 180 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ en bout de piste.

Quelle est la longueur minimale L de la piste de décollage si l'avion accélère uniformément à la valeur $a = 2,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$?

(a) 300 m

(b) 450 m

(c) 500 m

(d) 650 m

.....



Entraînement 10.4 — Distance de freinage.



Une voiture roule à $110 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ en ligne droite. En supposant que les freins imposent une décélération constante de norme $a = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, déterminer la distance d'arrêt de la voiture.

(a) 37,8 m

(b) 46,7 m

(c) 55,9 m

(d) 63,5 m

.....

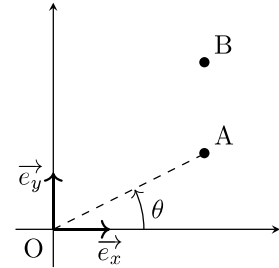
Coordonnées et projections de vecteurs

Entraînement 10.5 — Composantes de vecteurs.



On considère deux points A et B tels que la droite (AB) est parallèle à la droite (Oy). Le vecteur $\overrightarrow{OA}$ fait un angle θ avec l'axe (Ox).

Exprimer les composantes des vecteurs suivants dans le repère $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ en fonction de $a = \|\overrightarrow{OA}\|$, $b = \|\overrightarrow{AB}\|$ et de l'angle θ .



a) $\overrightarrow{OA}$

b) $\overrightarrow{OB}$

c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$

d) $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$

Entraînement 10.6 — Les coordonnées cylindriques.

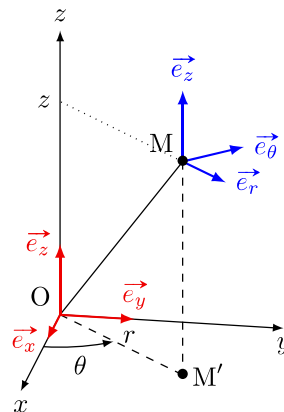


On considère le schéma ci-contre, dans lequel

- la base cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$
- et la base cylindrique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$

sont définies.

Le point M est repéré par la donnée de r , θ et z .



a) Écrire le vecteur $\overrightarrow{OM'}$ dans la base cartésienne

b) Écrire le vecteur $\overrightarrow{OM'}$ dans la base cylindrique

c) Écrire le vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base cartésienne

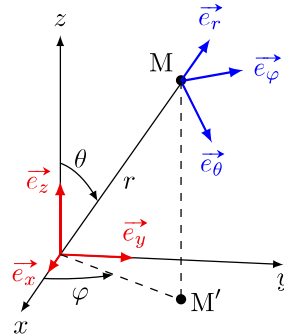
d) Écrire le vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base cylindrique



Entraînement 10.7 — Les coordonnées sphériques.



On considère le schéma ci-dessous, dans lequel la base cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et la base sphérique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ sont définies.



Le point M est repéré par la donnée de r , θ et φ .

a) Écrire la norme de $\overrightarrow{OM'}$ en fonction de r et θ

b) Écrire le vecteur $\overrightarrow{OM'}$ dans la base cartésienne

c) Écrire le vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base cartésienne

d) Écrire le vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base sphérique

e) Écrire le vecteur $\vec{e}_z$ dans la base sphérique



Entraînement 10.8 — Jouons au tennis.



Un élève regarde un match de tennis. Il filme un des échanges et décide d'étudier le mouvement de la balle pour en déduire sa vitesse et son accélération.

Pour cela, il utilise un logiciel d'exploitation de vidéo et remplit le tableau suivant :

t (en s)	0	0,05	0,10	0,15	0,20
x (en m)	0	0,35	0,70	1,05	1,40
y (en m)	1,5	2,09	2,66	3,21	3,74

a) Déterminer la vitesse v_0 (en $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$) de la balle à l'instant initial

b) Déterminer l'accélération (en $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$) de la balle à l'instant initial

Dérivée de vecteurs

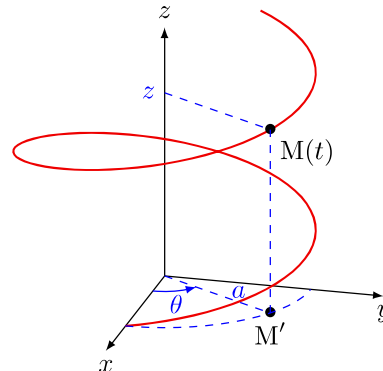


Entraînement 10.9 — Étude d'un mouvement hélicoïdal.



Le point matériel M de coordonnées cartésiennes (x, y, z) décrit une trajectoire hélicoïdale, définie par les équations :

$$\begin{cases} x(t) = a \times \cos(\omega t) \\ y(t) = a \times \sin(\omega t) \\ z(t) = b \times t. \end{cases}$$



a) Déterminer la vitesse $\vec{v}(M)$ dans la base cartésienne

b) Déterminer la norme de la vitesse

c) Déterminer l'accélération $\vec{a}(M)$ dans la base cartésienne

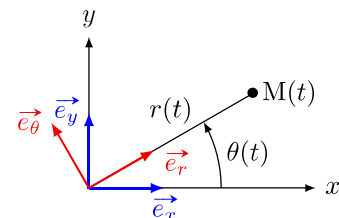
d) Déterminer la norme de l'accélération

Entraînement 10.10 — Dérivation des vecteurs unitaires de la base polaire.



On considère un point $M(t)$ en mouvement dans le plan (xOy) .

On note $r(t)$ et $\theta(t)$ les coordonnées de $M(t)$ dans le repère polaire $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$.



a) Exprimer le vecteur $\vec{e}_r$ dans la base cartésienne $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$

b) En déduire la dérivée $\frac{d\vec{e}_r}{dt}$ dans la base cartésienne $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$

c) Exprimer le vecteur $\vec{e}_\theta$ dans la base polaire $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$

d) Exprimer le vecteur $\vec{e}_y$ dans la base polaire $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$

e) En déduire l'expression de la dérivée $\frac{d\vec{e}_r}{dt}$ dans la base polaire



Entraînement 10.11 — Calcul d'une vitesse en coordonnées polaires.



On considère un point M dont les coordonnées polaires sont $\begin{cases} r(t) = a \times t \\ \theta(t) = b \times t^2 \end{cases}$.

La vitesse en coordonnées polaires s'écrit :

$$\vec{v}(M) = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta,$$

où $\dot{r} \vec{e}_r$ est appelée *vitesse radiale* et $r \dot{\theta} \vec{e}_\theta$ *vitesse orthoradiale*.

a) Déterminer la dimension de a

b) Déterminer la dimension de b

c) Déterminer la vitesse radiale en fonction de a

d) Déterminer la vitesse orthoradiale en fonction de a , b et t

e) En déduire l'expression de $\vec{v}(M)$

Entraînement 10.12 — Mouvement en spirale.



Un point M(t) décrit une trajectoire en forme de spirale. Dans le repère polaire (O, $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$), les coordonnées de M(t) sont :

$$\begin{cases} r(t) = r_0 e^{-t/\tau} \\ \theta(t) = \omega t, \end{cases}$$

où r_0 , τ et ω sont des constantes positives.

a) Déterminer la vitesse $\vec{v}(M)$ en coordonnées polaires.

On pourra utiliser la formule donnée dans l'entraînement précédent

L'accélération en coordonnées polaires s'écrit :

$$\vec{a}(M) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \vec{e}_\theta.$$

b) Déterminer l'accélération $\vec{a}(M)$

On donne les valeurs suivantes : $\omega = 4,78 \text{ tours} \cdot \text{min}^{-1}$, $\tau = 2,0 \text{ s}$ et $r_0 = 4,0 \text{ cm}$.

c) Dans ces conditions, l'accélération est-elle radiale ou orthoradiale?

d) Le mouvement de M est-il accéléré ou décéléré?

e) Déterminer l'équation polaire de la trajectoire de M

Étude de quelques mouvements

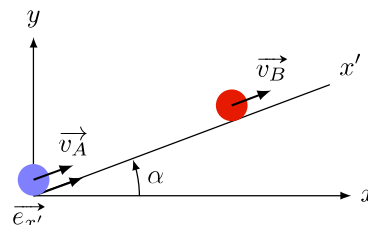
Entraînement 10.13 — Collision sur plan incliné.



Deux billes évoluent sur un plan incliné faisant un angle $\alpha = 20^\circ$ par rapport à l'horizontale.

À $t = 0$, elles sont distantes d'une longueur L .

- La bille A possède une vitesse initiale $v_0 \vec{e}_{x'}$.
Son accélération $\vec{a}(A) = -a \vec{e}_{x'}$ est constante au cours du temps.
Nous noterons $v_A(t) \vec{e}_{x'}$ sa vitesse à l'instant t .
- La bille B, quant à elle, n'a pas de vitesse initiale mais possède une accélération constante $\vec{a}(B) = a \vec{e}_{x'}$.
Nous noterons $v_B(t) \vec{e}_{x'}$ sa vitesse à l'instant t .



On donne $a = 3,35 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ et $v_0 = 3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

- Exprimer $v_A(t)$ en fonction de a , t et v_0
- Exprimer $v_B(t)$ en fonction de a et t
- Déterminer la position x'_A de A en fonction du temps
- Déterminer la position x'_B de B en fonction du temps
- Déterminer la distance L maximale (en cm) pour qu'une collision puisse avoir lieu.

.....

Entraînement 10.14 — Chute libre.



On considère le point M de masse m et de coordonnées (x, y, z) dans la base cartésienne $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Il est lancé avec la vitesse $\vec{v}_0 = v_{0x} \vec{e}_x + v_{0z} \vec{e}_z$ à partir de l'origine O du repère dans le champ de pesanteur uniforme $\vec{g} = -g \vec{e}_z$.

Tout frottement étant négligé, l'accélération de M est égale à $\vec{g}$ à tout instant.

- Exprimer $x(t)$ en fonction de v_{0x} et t
- Exprimer $z(t)$ en fonction de v_{0z} , g et t
- En déduire l'équation cartésienne de la trajectoire z en fonction de x ,
c'est-à-dire une relation entre $x(t)$ et $z(t)$

Entraînement 10.15 — Pauvre gazelle.



Un lion chasse une gazelle. Il court à la vitesse constante de $5,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. La gazelle aperçoit le lion quand il est à 10 m de distance. Elle se met alors en fuite en accélérant à $2,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Pour rattraper la gazelle, le lion se met aussi à accélérer au même instant à $3,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

a) Combien de temps mettra le lion à rattraper la gazelle?

b) Quelle distance aura parcourue la gazelle avant de se faire dévorer?

Réponses mélangées

$$\begin{array}{llll}
 a\omega(-\sin(\omega t)\vec{e}_x + \cos(\omega t)\vec{e}_y) + b\vec{e}_z & \textcircled{b} & a\vec{e}_r + 2abt^2\vec{e}_\theta & at \quad 1 \text{ h } 6 \text{ min } 40 \text{ s} \\
 \sqrt{(a\omega)^2 + b^2} & \text{orthoradiale} & \frac{a_0 \times \tau_1^2}{2} & a_0 \times \tau_1 \times \left(\frac{\tau_1}{2} + \tau_2\right) \quad a(\cos(\theta)\vec{e}_x + \sin(\theta)\vec{e}_y) \\
 \frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta}(-\sin\theta\vec{e}_x + \cos\theta\vec{e}_y) & r = r_0e^{-\theta} & \frac{1}{T^2} & \cos(\theta)\vec{e}_r - \sin(\theta)\vec{e}_\theta \\
 r(\cos(\theta)\vec{e}_x + \sin(\theta)\vec{e}_y) & \frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta & r\vec{e}_r & r\sin(\theta)(\cos(\varphi)\vec{e}_x + \sin(\varphi)\vec{e}_y) \\
 8,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} & r\vec{e}_r + z\vec{e}_z & 2,9 \text{ m} & \frac{1}{2}at^2 + L \quad r_0e^{-t/\tau} \left(-\frac{1}{\tau}\vec{e}_r + \omega\vec{e}_\theta\right) \\
 -at + v_0 & \vec{e}_x = \cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta & r_0e^{-t/\tau} \left(\left(\frac{1}{\tau^2} - \omega^2\right)\vec{e}_r - \left(2\frac{\omega}{\tau}\right)\vec{e}_\theta\right) & \\
 \cos\theta\vec{e}_x + \sin\theta\vec{e}_y & -\frac{1}{2}at^2 + v_0t & v_{0x}t & a\vec{e}_r \quad a\omega^2 \quad 67 \text{ cm} \quad 49,4 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} \\
 r\sin(\theta)(\cos(\varphi)\vec{e}_x + \sin(\varphi)\vec{e}_y) + r\cos(\theta)\vec{e}_z & \vec{e}_y = \sin\theta\vec{e}_r + \cos\theta\vec{e}_\theta & 1,7 \text{ s} & z = -\frac{g}{2v_{0x}^2}x^2 + \frac{v_{0z}}{v_{0x}}x \\
 \text{décéléré} & |r\sin(\theta)| & r\vec{e}_r & -b\vec{e}_y \quad -a\omega^2(\cos(\omega t)\vec{e}_x + \sin(\omega t)\vec{e}_y) \\
 2abt^2\vec{e}_\theta & a\left(\cos(\theta)\vec{e}_x + \left(\sin(\theta) + \frac{b}{a}\right)\vec{e}_y\right) & a\left(2\cos(\theta)\vec{e}_x + \left(2\sin(\theta) + \frac{b}{a}\right)\vec{e}_y\right) & \\
 r(\cos(\theta)\vec{e}_x + \sin(\theta)\vec{e}_y) + z\vec{e}_z & -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0z}t & \frac{L}{T} & a_0 \times \tau_1 \quad \textcircled{c} \quad 8 \text{ min } 20 \text{ s}
 \end{array}$$

Principe fondamental de la dynamique

Prérequis

Projections. Coordonnées polaires. Équations différentielles simples.

Pour commencer



Entraînement 11.1 — Une relation algébrique.



La vitesse v (en régime permanent) d'un mobile vérifie l'équation :

$$m_1(v - v_1) + m_2(v - v_2) = p.$$

Donner l'expression de v (en fonction de m_1 , m_2 , v_1 , v_2 et p)



Entraînement 11.2 — Un système de deux équations.



Un problème de mécanique fait intervenir une force d'intensité F et un angle $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. En projetant la deuxième loi de Newton sur deux axes, on aboutit au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} T + F \sin \alpha = mR\omega^2 \\ F \cos \alpha = mg. \end{cases}$$

a) Déterminer F en fonction des données T , m , R , ω et g

b) Déterminer α en fonction des données T , m , R , ω et g



Entraînement 11.3 — Quelques équations différentielles.



Résoudre les équations différentielles suivantes, sachant que $v = 0$ à $t = t_0$ et que les paramètres a_0 et k sont des constantes.

a) $\frac{dv}{dt} = a_0$

b) $\frac{dv}{dt} = -kv$

c) $\frac{dv}{dt} = -kv + a_0$

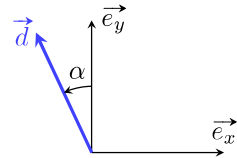
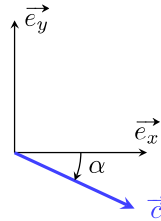
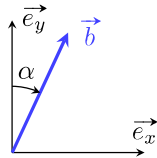
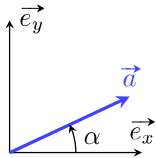
Décomposition de vecteurs



Entraînement 11.4 — Des projections.



On considère les vecteurs unitaires suivants :



Décomposer dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ les vecteurs :

a) $\vec{a}$

c) $\vec{c}$

b) $\vec{b}$

d) $\vec{d}$

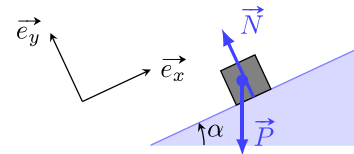


Entraînement 11.5 — Sur un plan incliné.



On considère la situation représentée ci-contre.

Décomposer dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ les vecteurs suivants en fonction de α et des normes respectives de $\vec{P}$ et $\vec{N}$: P et N .



a) $\vec{P}$

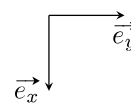
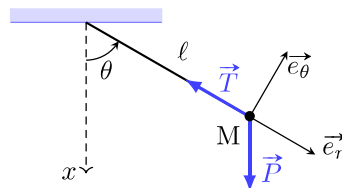
b) $\vec{N}$



Entraînement 11.6 — Avec un pendule simple (I).



On considère la situation ci-dessous :



Décomposer dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ les vecteurs suivants en fonction de θ et des normes respectives de $\vec{P}$ et $\vec{T}$: P et T .

a) $\vec{P}$

c) $\vec{P} + \vec{T}$

b) $\vec{T}$

**Entraînement 11.7 — Avec un pendule simple (II).**

On se place dans la même situation que ci-dessus. Décomposer dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$:

a) $\vec{P}$ c) $\vec{P} + \vec{T}$ b) $\vec{T}$

Entre accélération et position

Entraînement 11.8 — Du vecteur position au vecteur accélération.

On considère un point M en mouvement dont les coordonnées cartésiennes dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ sont, à chaque instant, $x(t) = \frac{1}{2}a_0t^2 + x_0$, $y(t) = -v_0t$ et $z(t) = z_0$.

Donner l'expression des vecteurs :

a) position

b) vitesse

c) accélération ..

Entraînement 11.9 — Du vecteur accélération au vecteur position.

On considère un point M de masse m en chute libre soumis à son poids $\vec{P} = mg\vec{e}_z$. Ce point M a été lancé avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_x$ et une position initiale $M_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Donner l'expression des vecteurs :

a) accélération

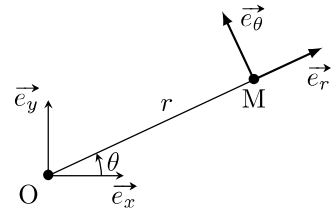
c) position

b) vitesse

Autour des coordonnées polaires

Dans ce paragraphe, on considère un point M repéré par la distance r et l'angle θ en coordonnées polaires. La distance r et l'angle θ dépendent du temps t : le point M est mobile.

On représente la situation par le schéma ci-contre.



Entraînement 11.10 — Trois calculs fondamentaux.



Décomposer dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ les vecteurs :

- a) $\vec{e}_r$ b) $\vec{e}_\theta$

En déduire (en dérivant) l'expression dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ des vecteurs :

- c) $\frac{d\vec{e}_r}{dt}$ d) $\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}$

En déduire l'expression, dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$, des vecteurs :

- e) $\frac{d\vec{e}_r}{dt}$ f) $\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}$

Entraînement 11.11 — Vecteur position en coordonnées polaires.



Comment s'exprime le vecteur position $\vec{OM}$ en coordonnées polaires ?

- Ⓐ $\vec{OM} = r\vec{e}_r + \theta\vec{e}_\theta$ Ⓑ $\vec{OM} = r\vec{e}_r + \dot{\theta}\vec{e}_\theta$ Ⓒ $\vec{OM} = r\vec{e}_r$ Ⓓ $\vec{OM} = \theta\vec{e}_\theta$

.....

Entraînement 11.12 — Accélération en coordonnées polaires.



Déduire de ce qui précède l'expression, en fonction de $\vec{e}_r$ et de $\vec{e}_\theta$:

- a) du vecteur vitesse $\vec{v}$
- b) du vecteur accélération $\vec{a}$

Étude de systèmes en équilibre

Entraînement 11.13 — Tension d'un fil.



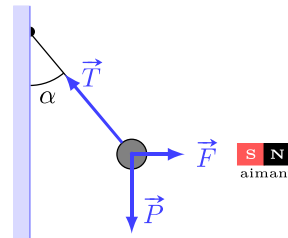
Une bille d'acier de poids $P = \|\vec{P}\| = 2,0 \text{ N}$, fixée à l'extrémité d'un fil de longueur $\ell = 50 \text{ cm}$, est attirée par un aimant exerçant une force $F = \|\vec{F}\| = 1,0 \text{ N}$. À l'équilibre, le fil s'incline d'un angle α et l'on a :

$$\vec{T} + \vec{F} + \vec{P} = \vec{0},$$

où $\vec{T}$ est la tension exercée par le fil.

Calculer les valeurs numériques de :

- a) la tension $T = \|\vec{T}\|$ du fil
- b) l'angle α (en radians)



Entraînement 11.14 — Masse suspendue.



Un objet qui pèse 800 N est suspendu en équilibre à l'aide de deux cordes symétriques qui font un angle $\theta = 20^\circ$ avec la direction horizontale.

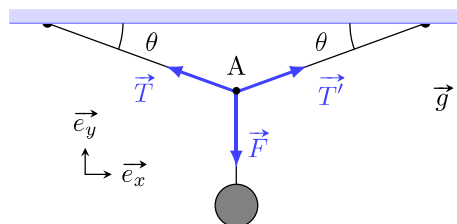
Le point A est soumis à trois forces :

$$\vec{T}, \vec{T}' \text{ et } \vec{F},$$

de normes respectives T, T' et F .

On note $\vec{R} = R_x \vec{e}_x + R_y \vec{e}_y$ la résultante des forces.

- a) Exprimer la composante horizontale R_x en fonction de T, T' et θ
- b) Exprimer la composante verticale R_y en fonction de T, T', F et θ
- c) Déterminer la tension T en résolvant l'équation $\vec{R} = \vec{0}$



Mouvements rectilignes

Entraînement 11.15 — Chute avec frottement.



Un corps de masse $m = 2 \text{ kg}$ tombe verticalement avec une accélération de $a = 9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Lors de sa chute, il subit la force de pesanteur ainsi qu'une force de frottement due à l'air.

On prendra $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ pour l'intensité du champ de pesanteur.

Combien vaut l'intensité de la force de frottement ?

Entraînement 11.16 — Contact dans un ascenseur.



Un homme de masse $m = 80 \text{ kg}$ est dans un ascenseur qui monte avec une accélération $a = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. On note $\vec{F}$ la force exercée par l'homme sur le plancher de l'ascenseur.

On prendra $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ pour l'intensité du champ de pesanteur.

Combien vaut l'intensité de $\vec{F}$?

Entraînement 11.17 — Calcul d'une action de contact.

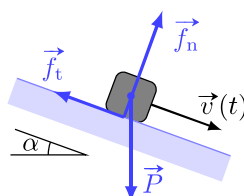


Un bloc de masse m et de poids $\vec{P}$ glisse à une vitesse $v(t)$, variable au cours du temps, sur un support plan qui exerce une action de contact.

Celle-ci se décompose en deux actions :

- une action normale à la surface $\vec{f}_n$;
- une action de frottement $\vec{f}_t$ opposée à la vitesse de glissement.

Le plan est incliné d'un angle α , comme figuré ci-dessous :



Déterminer (en fonction d'au moins une des données $P = \|\vec{P}\|$, $v(t)$, m ou α) :

a) l'intensité de l'action normale f_n

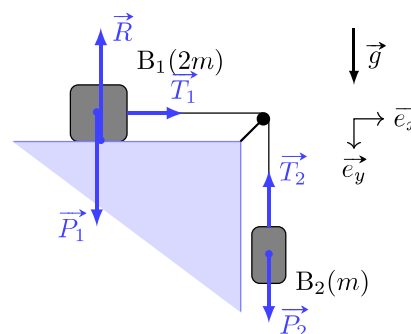
b) l'intensité du frottement f_t

Entraînement 11.18 — Calcul d'une accélération.



Deux blocs B_1 et B_2 de masses respectives $2m$ et m sont reliés par un fil. On passe le fil dans la gorge d'une poulie, puis on maintient le bloc B_1 sur la table alors que l'autre est suspendu dans l'air. On libère le bloc B_1 qui glisse alors sur la table. On note T_1 et T_2 les normes des tensions exercées par le fil sur les blocs, a_1 et a_2 les normes des accélérations respectives des blocs B_1 et B_2 , et g la valeur du champ de pesanteur.

Les frottements sont négligeables.



a) Exprimer a_1 en fonction de m et T_1

b) Exprimer l'accélération a_2 de B_2 en fonction de m , g et T_2

Le fil étant inextensible et sans masse, on a $a_1 = a_2$ et $T_1 = T_2$.

c) En déduire l'accélération en fonction uniquement de g

Réponses mélangées

$$\begin{array}{ccccccc}
 \sqrt{(mR\omega^2 - T)^2 + (mg)^2} & \arctan\left(\frac{mR\omega^2 - T}{mg}\right) & \textcircled{c} & \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta & & & \\
 -P\sin(\alpha)\vec{e}_x - P\cos(\alpha)\vec{e}_y & (P\cos(\theta) - T)\vec{e}_r - P\sin(\theta)\vec{e}_\theta & 0 & -\dot{\theta}\cos(\theta)\vec{e}_x - \dot{\theta}\sin(\theta)\vec{e}_y & & & \\
 \frac{a_0}{k}\left[1 - e^{-k(t-t_0)}\right] & \cos(\alpha)\vec{e}_x + \sin(\alpha)\vec{e}_y & -T\vec{e}_r & -\sin(\theta)\vec{e}_x + \cos(\theta)\vec{e}_y & & & \\
 \cos(\alpha)\vec{e}_x + \sin(\alpha)\vec{e}_y & -\sin(\alpha)\vec{e}_x + \cos(\alpha)\vec{e}_y & (v_0t + x_0)\vec{e}_x + y_0\vec{e}_y + \frac{1}{2}gt^2\vec{e}_z & & & & \\
 P\vec{e}_x & (T' - T)\cos\theta & -m\frac{dv}{dt} + P\sin\alpha & \dot{\theta}\vec{e}_\theta & g - \frac{T_2}{m} & g\vec{e}_z & \\
 P\cos(\theta)\vec{e}_r - P\sin(\theta)\vec{e}_\theta & v_0\vec{e}_x + gt\vec{e}_z & 1,17\text{ kN} & 1,6\text{ N} & \frac{g}{3} & N\vec{e}_y & 0,46\text{ rad} \\
 (P - T\cos(\theta))\vec{e}_x - T\sin(\theta)\vec{e}_y & a_0t\vec{e}_x - v_0\vec{e}_y & a_0\vec{e}_x & (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta & & & \\
 \frac{T_1}{2m} & -T\cos(\theta)\vec{e}_x - T\sin(\theta)\vec{e}_y & \left(\frac{1}{2}a_0t^2 + x_0\right)\vec{e}_x - v_0t\vec{e}_y + z_0\vec{e}_z & (T' + T)\sin\theta - F & & & \\
 P\cos\alpha & 2,2\text{ N} & \frac{p + m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2} & -\sin(\alpha)\vec{e}_x + \cos(\alpha)\vec{e}_y & 864\text{ N} & & \\
 \cos(\theta)\vec{e}_x + \sin(\theta)\vec{e}_y & a_0(t - t_0) & -\dot{\theta}\vec{e}_r & -\dot{\theta}\sin(\theta)\vec{e}_x + \dot{\theta}\cos(\theta)\vec{e}_y & & &
 \end{array}$$

Approche énergétique en mécanique

Prérequis

Systèmes de coordonnées. Expression de forces (poids, force de rappel).
Travail d'une force. Théorèmes généraux (dynamique et énergétiques).

Énergies potentielles

Entraînement 12.1 — La juste formule.



On considère un point matériel de masse m plongé dans le champ de pesanteur $\vec{g}$. On se place dans un repère cartésien $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ tel que $\vec{g} = -g\vec{e}_y$, le point O étant pris comme origine de l'énergie potentielle. Quelle est l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur ?

(a) mgx

(b) $-mgy$

(c) mgz

(d) mgz

.....

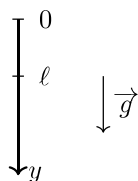


Entraînement 12.2 — Plusieurs expressions de l'énergie potentielle de pesanteur.

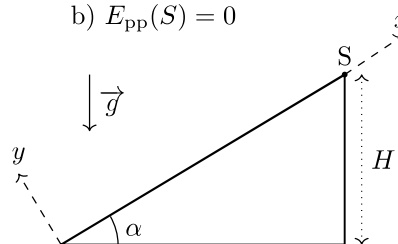


Déterminer la fonction énergie potentielle de pesanteur d'un point matériel de masse m associée aux situations suivantes :

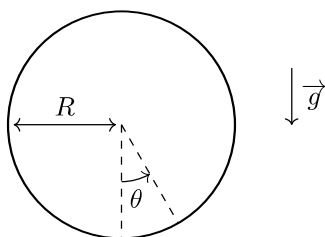
a) $E_{pp}(\ell) = 0$



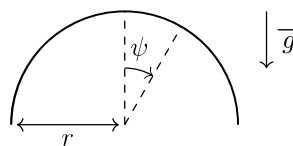
b) $E_{pp}(S) = 0$



c) $E_{pp}(\theta = \pi/2) = 0$



d) $E_{pp}(\psi = 0) = E_0$



a) $E_{pp}(y) = \dots\dots\dots$

c) $E_{pp}(\theta) = \dots\dots\dots$

b) $E_{pp}(x) = \dots\dots\dots$

d) $E_{pp}(\psi) = \dots\dots\dots$

Entraînement 12.3 — La juste formule... le retour.



On considère un point matériel M de masse m astreint à se déplacer selon un axe (Oy) horizontal. Il est attaché à un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 . L'autre extrémité du ressort est fixée en O.

Quelle est l'expression de l'énergie potentielle élastique du point M pour que celle-ci soit nulle lorsque l'allongement du ressort est nul ?

Ⓐ $\frac{1}{2}ky^2$

Ⓑ $\frac{1}{2}k(y - \ell_0)^2$

Ⓒ $\frac{1}{2}k(y^2 - \ell_0^2)$

Ⓓ $-\frac{1}{2}k(\ell_0 - y)^2$

.....

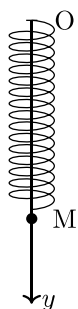


Entraînement 12.4 — Expression de l'énergie potentielle élastique.

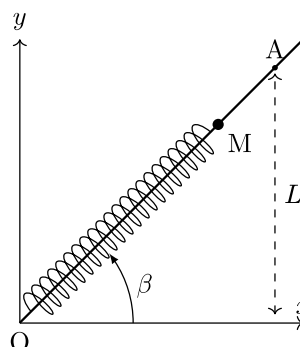


Déterminer la fonction énergie potentielle élastique associée aux situations suivantes, où tous les ressorts sont de longueur à vide ℓ_0 et de raideur k :

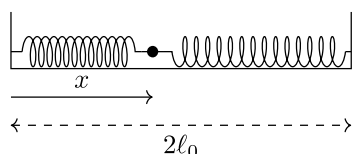
a) $E_{pe}(y = 0) = 0$



b) $E_{pe}(A) = 0$



c) $E_{pe}(x = \ell_0) = E_0$



a) $E_{pe}(y) =$

b) $E_{pe}(x) =$

c) $E_{pe}(x) =$

Travail d'une force

Entraînement 12.5 — Une force de frottement.



On considère le travail $W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$ d'une force de frottement $\vec{F} = -h \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$, où $\vec{v}$ est le vecteur vitesse du point matériel subissant la force et h est une constante.

Déterminer W pour les chemins suivants :

a) Un segment reliant A(0,0) et B(ℓ ,0)

b) Un arc de cercle d'angle α et de rayon R

c) Un rectangle ABCD de côtés a et b

d) Un triangle ABC de côtés a, b, c

e) En comparant les résultats obtenus, peut-on dire que la force est conservative ?

(a) Oui

(b) Non

.....

Théorèmes énergétiques

Entraînement 12.6 — Freinage et variation d'énergie cinétique.



On considère une voiture (assimilée à un point matériel de masse m) se déplaçant le long d'une route rectiligne horizontale et dont la vitesse initiale au début de la phase de freinage vaut $\vec{v} = v_0 \vec{e}_x$.

En freinant, le véhicule est soumis à une force de frottement $\vec{F} = -h \vec{e}_x$.

Quelle est l'expression de la distance d'arrêt d de la voiture ?

(a) $\frac{2mv_0^2}{h}$

(b) $\frac{mv_0^2}{h}$

(c) $\frac{mv_0^2}{2h}$

.....

Entraînement 12.7 — Pendule simple.



Un pendule simple est constitué d'un fil de longueur $\ell = 1,0$ m auquel est accrochée une masse $m = 100$ g.

À $t = 0$, on donne à cette masse une vitesse horizontale $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$, où $v_0 = 2,0$ m · s⁻¹.

On note θ_0 l'angle pour lequel la masse rebrousse chemin.

a) Exprimer $\cos(\theta_0)$

b) Calculer θ_0

Entraînement 12.8 — Trampoline simplifié.

Un ressort de longueur à vide $\ell_0 = 30 \text{ cm}$, de raideur $k = 1,0 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$, sans masse, est posé sur le sol à la verticale. On lâche d'une hauteur $H = 2,0 \text{ m}$ et sans vitesse initiale une masse ponctuelle $m = 1,0 \text{ kg}$. Après une durée de chute libre sans frottement, la masse atteint le ressort, le comprime jusqu'à ce que celui-ci la propulse vers le haut comme le ferait un trampoline.

En admettant que la masse quitte le ressort quand $z = \ell_0$, calculer :

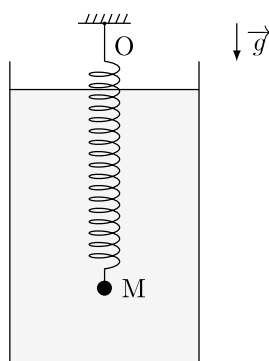
a) La vitesse de la masse lors du contact avec le ressort

b) L'altitude minimale atteinte par la masse

c) L'altitude maximale de la masse (en fin de remontée)

Entraînement 12.9 — Oscillateur vertical.

Un point M de masse m est accroché à une paroi horizontale fixe par l'intermédiaire d'un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 . Son mouvement s'effectue dans un liquide qui produit une force de frottements fluides linéaire $\vec{F} = -\alpha \vec{v}$, où $\alpha > 0$. On néglige la poussée d'Archimède, on ne considère que des mouvements verticaux dans le champ de pesanteur $\vec{g}$.



a) On note z la position de M par rapport à O.

Déterminer, par une méthode énergétique, l'équation différentielle vérifiée par z .

.....

b) On note à présent ζ la position de M par rapport à sa position à l'équilibre.

Déterminer l'équation différentielle vérifiée par ζ .

.....

Mouvements conservatifs et positions d'équilibre

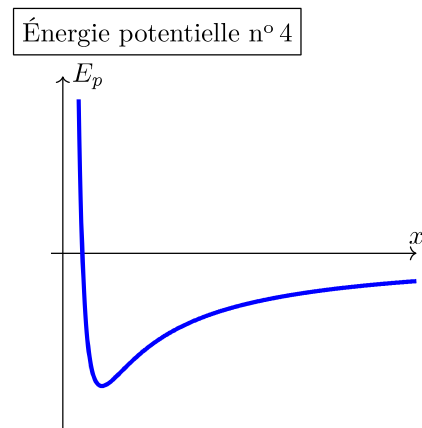
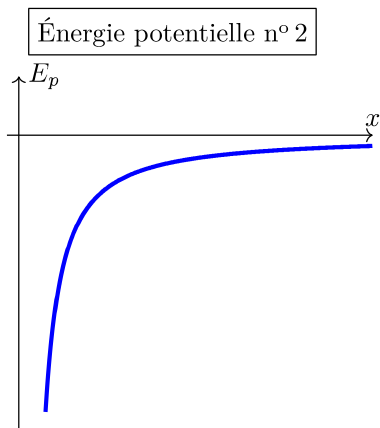
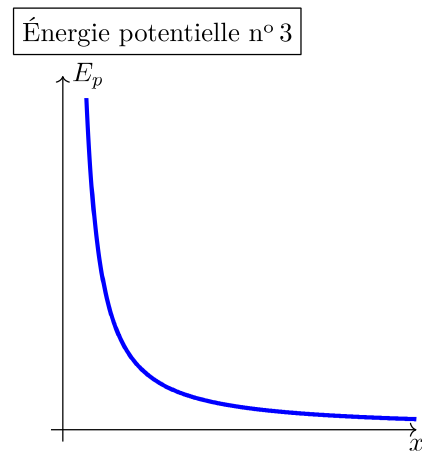
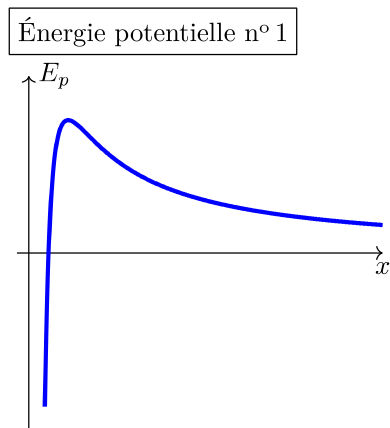
Entraînement 12.10 — Profils d'énergies potentielles.



Les quatre profils ci-après représentent la fonction énergie potentielle suivante :

$$E_p(x) = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2},$$

avec α, β des réels non nuls.



Attribuer à chacune des figures ci-dessus les bons signes pour α et β , en indiquant laquelle des réponses suivantes est la bonne :

(a) $\alpha > 0$ et $\beta > 0$

(c) $\alpha < 0$ et $\beta > 0$

(b) $\alpha > 0$ et $\beta < 0$

(d) $\alpha < 0$ et $\beta < 0$

a) Énergie potentielle n° 1

c) Énergie potentielle n° 3

b) Énergie potentielle n° 2

d) Énergie potentielle n° 4



Entraînement 12.11 — Autour d'une position d'équilibre.



On donne l'expression de potentiels E_p , dans chacun desquels évolue un point matériel de masse m .

Déterminer dans chaque cas la position d'équilibre stable.

a) Pour $E_p(\theta) = mgl(1 - \cos(\theta))$:

$\theta_{\text{eq}} = \dots\dots\dots$

b) Pour $E_p(z) = \frac{1}{2}\kappa z^2 + \frac{1}{4}\lambda z^4$ avec $\kappa > 0$ et $\lambda < 0$:

$z_{\text{eq}} = \dots\dots\dots$

c) Pour $E_p(x) = U_0 e^{\beta x^2}$ avec $U_0, \beta > 0$:

$x_{\text{eq}} = \dots\dots\dots$

d) Pour $E_p(\phi) = E_0 \sin^2(\phi - a)$ avec $E_0 > 0$, $\phi \in [0, \pi[$ et $a \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:

$\phi_{\text{eq}} = \dots\dots\dots$

Entraînement 12.12 — État lié ou état de diffusion ?

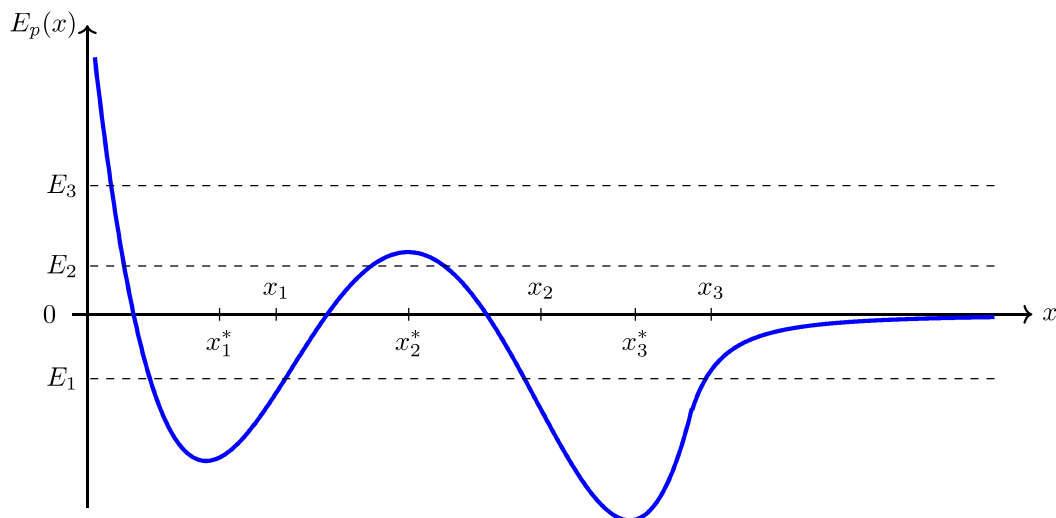


On considère le profil suivant d'énergie potentielle (les abscisses étoilées et l'abscisse x_3 serviront dans l'entraînement suivant).

Pour chaque état suivant, étant donné les valeurs de l'énergie mécanique et de la position initiale d'un point matériel, dire si ce dernier se trouve :

Ⓐ dans un état lié

Ⓑ dans un état de diffusion



a) $E_m = E_1$ et $x(0) = x_1$ d) $E_m = E_2$ et $x(0) = x_2$

b) $E_m = E_1$ et $x(0) = x_2$ e) $E_m = E_3$ et $x(0) = x_1$

c) $E_m = E_2$ et $x(0) = x_1$ f) $E_m = E_3$ et $x(0) = x_2$

Entraînement 12.13 — Analyse d'un profil d'énergie potentielle.



On reprend le profil d'énergie potentielle de l'entraînement précédent.

Pour chacune des positions suivantes, déterminer si elle est stable ou instable, et si le mouvement au voisinage de ces positions est périodique et/ou harmonique, en indiquant laquelle des réponses suivantes est la bonne :

(a) équilibre stable

(c) mouvement périodique

(b) équilibre instable

(d) mouvement harmonique

Plusieurs bonnes réponses sont possibles.

a) Voisinage de x_1^*		c) Voisinage de x_3^*	
b) Voisinage de x_2^*		d) Région entre x_2 et x_3	

Entraînement 12.14 — Vitesse à l'infini.



On considère le profil d'énergie potentielle des deux entraînements précédents.

Un point matériel de masse $m = 2,30 \text{ kg}$ est abandonné avec l'énergie $E_3 = 1,30 \text{ kJ}$.

Calculer la vitesse du point matériel à l'infini

Réponses mélangées

(b) (c) (c) (d) $mg(\ell - y)$ $0,11 \text{ m}$ a $\frac{1}{2}k(y - \ell_0)^2 - \frac{k\ell_0^2}{2}$
 (a), (c) et (d) 0 $\frac{1}{2}k\left(\frac{x}{\cos(\beta)} - \ell_0\right)^2 - \frac{1}{2}k\left(\frac{L}{\sin(\beta)} - \ell_0\right)^2$ (a) et (c) $0,65 \text{ rad} = 37^\circ$
 $5,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ (a), (c) et (d) $-(a + b + c)h$ $33,6 \text{ m/s}$ $mgr(\cos(\psi) - 1) + E_0$
 (b) (a) $-hR\alpha$ (a) $mg(x \sin(\alpha) - H)$ (b) $1 - \frac{v_0^2}{2g\ell}$ $-h\ell$ $2,0 \text{ m}$
 $-(2a + 2b)h$ $\ddot{z} + \frac{\alpha}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = g + \frac{k\ell_0}{m}$ 0 $-mgR \cos(\theta)$ $E_0 + k(x - \ell_0)^2$
 $\zeta + \frac{\alpha}{m}\dot{\zeta} + \frac{k}{m}\zeta = 0$ 0 (b) (a) (b) (b) (b) (c) (a)

Moment cinétique

Prérequis

Coordonnées polaires. Projections. Produit vectoriel. Moment cinétique. Moment d'inertie. Moment d'une force.

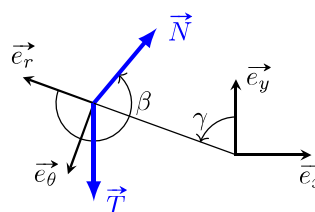
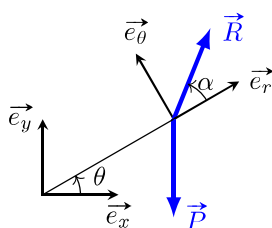
Projections préparatoires



Entraînement 13.1 — Calcul de produits scalaires.



On considère les vecteurs suivants, où $\vec{P}$ et $\vec{T}$ sont verticaux :



Calculer les produits scalaires suivants en fonction des normes ($\|\vec{P}\|$, $\|\vec{T}\|$, etc.) ainsi que des différents angles apparaissant sur les schémas.

- | | | |
|---|------------------------------------|---|
| a) $\vec{P} \cdot \vec{e}_\theta \dots$ | c) $\vec{R} \cdot \vec{e}_y \dots$ | e) $\vec{N} \cdot \vec{e}_r \dots$ |
| b) $\vec{N} \cdot \vec{e}_y \dots$ | d) $\vec{T} \cdot \vec{e}_r \dots$ | f) $\vec{N} \cdot \vec{e}_\theta \dots$ |



Entraînement 13.2 — Projections dans une base.



En utilisant la formule donnant la décomposition d'un vecteur $\vec{v}$ dans une base orthonormée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$

$$\vec{v} = (\vec{v} \cdot \vec{e}_1) \vec{e}_1 + (\vec{v} \cdot \vec{e}_2) \vec{e}_2,$$

décomposer les vecteurs de l'exercice précédent dans chaque base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ et $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$.

- | | |
|---|---|
| a) $\vec{P}$ dans $(\vec{e}_x, \vec{e}_y) \dots$ | e) $\vec{R}$ dans $(\vec{e}_x, \vec{e}_y) \dots$ |
| b) $\vec{P}$ dans $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta) \dots$ | f) $\vec{R}$ dans $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta) \dots$ |
| c) $\vec{T}$ dans $(\vec{e}_x, \vec{e}_y) \dots$ | g) $\vec{N}$ dans $(\vec{e}_x, \vec{e}_y) \dots$ |
| d) $\vec{T}$ dans $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta) \dots$ | h) $\vec{N}$ dans $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta) \dots$ |

Produit vectoriel



Entraînement 13.3 — Produits vectoriels à partir de décompositions.



En utilisant le schéma du premier exercice et les décompositions du deuxième, donner l'expression des produits vectoriels suivants. Comme d'habitude, on complète la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ par le vecteur $\vec{e}_z$ suivant la « règle de la main droite ».

a) $\vec{P} \wedge \vec{R} \dots$ b) $\vec{T} \wedge \vec{e}_r \dots$ c) $\vec{e}_x \wedge \vec{N} \dots$



Entraînement 13.4 — Produits vectoriels à partir des coordonnées.



On donne les quatre vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$ définis de manière numérique :

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer les produits vectoriels et produits scalaires suivants :

a) $\vec{A} \wedge \vec{B} \dots$ d) $\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{e}_x) \dots$

b) $(\vec{B} + \vec{A}) \wedge \vec{A} \dots$ e) $\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) \dots$

c) $\vec{e}_x \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B}) \dots$ f) $(\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C} \dots$

Moment cinétique

Entraînement 13.5 — Bataille de moments cinétiques.



Parmi les quatre planètes décrites dans le tableau ci-dessous, laquelle présente le moment cinétique autour du Soleil le plus important ?

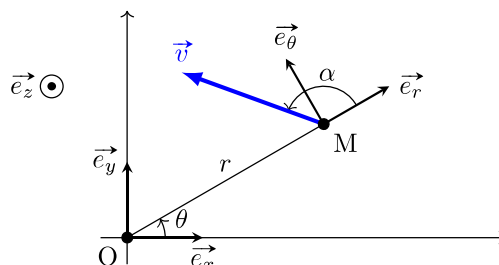
	Masse	Distance au Soleil	Vitesse sur l'orbite
Mercure	3×10^{26} g	58×10^9 m	170×10^3 km · h ⁻¹
Vénus	5×10^{27} g	$1,1 \times 10^{13}$ cm	35×10^3 m · s ⁻¹
Terre	6×10^{21} t	150×10^6 km	30 km · s ⁻¹
Mars	6×10^{23} kg	230×10^6 km	87×10^5 cm · h ⁻¹

.....

Entraînement 13.6 — Un moustique allumé.



On considère un moustique M de masse m dont le vecteur vitesse de norme v fait un angle $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ avec le vecteur $\overrightarrow{OM}$ comme représenté dans le schéma ci-dessous.



Exprimer le moment cinétique du moustique M par rapport à O en fonction de m , r , v et α .

.....

Moments d'inertie



Entraînement 13.7 — Une porte d'entrée.



On considère une porte de masse M , de longueur L , de hauteur h et d'épaisseur e négligeable dont on veut calculer le moment d'inertie par rapport à l'axe vertical passant par O situé dans le coin inférieur gauche de la porte.

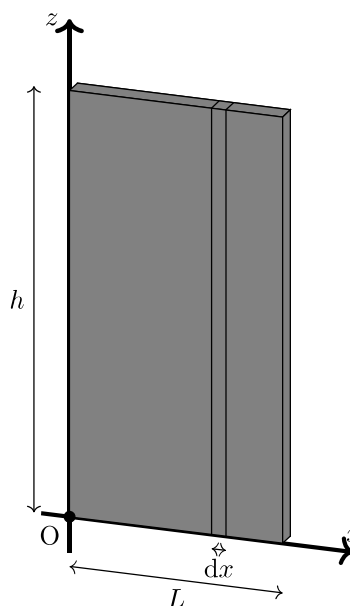
La masse est répartie de manière homogène sur toute la porte, de sorte que chaque petit volume $dV = dx dy dz$ ait pour masse :

$$dm = \rho dV,$$

avec $\rho = \frac{M}{Lhe}$.

Dans cette configuration, le moment d'inertie s'écrit :

$$I_{\Delta} = \iiint_{\text{porte}} x^2 dm = \rho \int_0^L x^2 dx \times \int_0^e dy \times \int_0^h dz.$$



Exprimer I_{Δ} en fonction de M et L



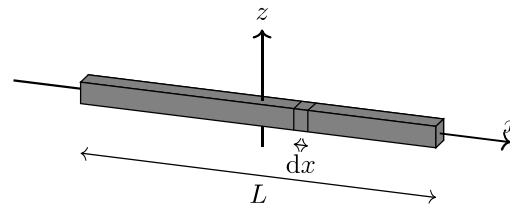
Entraînement 13.8 — Un bâton de majorette.



On considère un bâton de masse M , de longueur L et de section négligeable dont on veut calculer le moment d'inertie par rapport à son centre O .

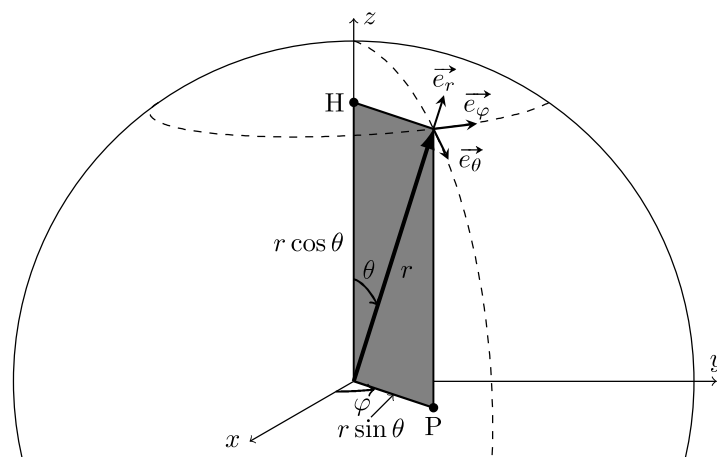
La masse est régulièrement répartie uniquement selon une variable x , de sorte que le bout de bâton de longueur dx situé à une distance x du centre ait pour masse $dm = \frac{M}{L} dx$.

Pour une rotation par rapport à un axe (Oz) orthogonal à l'axe (Ox) du bâton, et passant par son centre, calculer en fonction de M et L l'expression du moment d'inertie. C'est-à-dire, calculer :



$$I_{\Delta} = \int_{\text{bâton}} x^2 dm = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{M}{L} x^2 dx = \dots\dots\dots$$

Entraînement 13.9 — Une boule de bowling.



On considère une boule homogène de masse M et de rayon R .

Un élément de volume dV (valant $dr \times r d\theta \times r \sin \theta d\varphi$ en coordonnées sphériques) correspond à une masse $dm = \rho dV$, avec $\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$.

Ces éléments de masse sont situés à une distance $r \sin \theta$ de l'axe (Oz) de sorte que le moment d'inertie par rapport à cet axe peut s'écrire :

$$I_{\Delta} = \iiint_{\text{sphère}} (r \sin \theta)^2 dm = \rho \int_0^R r^4 dr \times \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta \times \int_0^{2\pi} d\varphi.$$

Exprimer I_{Δ} en fonction de M et R

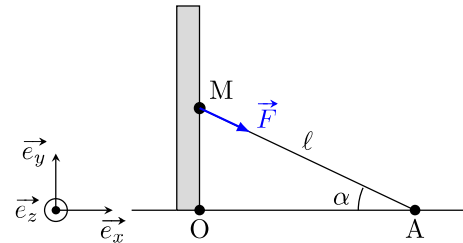
Moment d'une force

Entraînement 13.10 — Fil accroché au mur.



On considère un mur auquel est accroché un filin qu'on tire depuis un point A. Il s'agit de trouver le moment de la force $\vec{F}$ par rapport aux axes (Oz) et (Az) en fonction de F , ℓ et α .

Calculer :



a) $\mathcal{M}_{Oz}(\vec{F})$

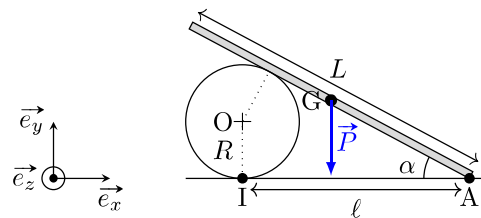
b) $\mathcal{M}_{Az}(\vec{F})$

Entraînement 13.11 — Une planche de cirque.



On considère une planche homogène de masse m appuyée sur un cylindre.

Calculer le moment du poids de cette planche par rapport aux divers points intéressants du système.



a) $\overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\vec{P})$

b) $\overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\vec{P})$

c) $\overrightarrow{\mathcal{M}}_I(\vec{P})$

Exercice récapitulatif

Entraînement 13.12 — Basculement d'une barre en T.



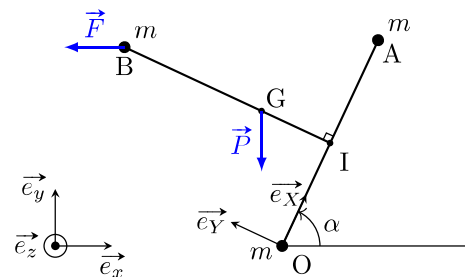
On considère trois masses m réparties aux trois sommets d'un triangle OAB isocèle en B et reliées par des tiges sans masse vérifiant :

$$OA = IB = a.$$

On note I le milieu du segment [OA].

On note G le centre de gravité des trois masses, qui est situé sur le segment [IB] de sorte que $GB = \frac{2}{3}a$.

On notera P et F les normes des deux forces représentées sur le schéma.



a) Écrire le vecteur $\overrightarrow{OB}$ dans la base $(\vec{e}_X, \vec{e}_Y)$

b) Écrire le vecteur $\overrightarrow{OG}$ dans la base $(\vec{e}_X, \vec{e}_Y)$

c) Écrire le vecteur $\vec{P}$ dans la base $(\vec{e}_X, \vec{e}_Y)$

- d) Écrire le vecteur $\vec{F}$ dans la base $(\vec{e}_X, \vec{e}_Y)$
- e) Calculer $\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{F})$
- f) Calculer $\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{P})$
- g) En supposant qu'il y ait équilibre entre les deux moments, déterminer l'expression $\tan(\alpha)$ dans ce cas.
.....

Réponses mélangées

$$\frac{a}{2} \vec{e}_X + \frac{a}{3} \vec{e}_Y \quad aF \left(\frac{\sin \alpha}{2} + \cos \alpha \right) \vec{e}_z \quad \begin{pmatrix} -7 \\ 14 \\ -7 \end{pmatrix} \quad \|\vec{N}\|(-\sin(\beta + \gamma) \vec{e}_x + \cos(\beta + \gamma) \vec{e}_y)$$

$$\text{la Terre} \quad \frac{a}{2} \vec{e}_X + a \vec{e}_Y \quad -\|\vec{P}\| \cos \theta \quad \|\vec{N}\|(\cos(\beta) \vec{e}_r + \sin(\beta) \vec{e}_\theta)$$

$$\vec{T} = \|\vec{T}\|(-\cos(\gamma) \vec{e}_r + \sin(\gamma) \vec{e}_\theta) \quad \|\vec{N}\| \cos(\gamma + \beta) \quad -7 \quad aP \left(-\frac{\cos \alpha}{2} + \frac{\sin \alpha}{3} \right) \vec{e}_z$$

$$\frac{1}{12} M L^2 \quad P(-\sin \alpha \vec{e}_X - \cos \alpha \vec{e}_Y) \quad \frac{1}{3} M L^2 \quad -\|\vec{T}\| \vec{e}_y \quad -mg \left(\ell - \frac{L}{2} \cos \alpha \right) \vec{e}_z$$

$$\frac{mgL}{2} \cos \alpha \vec{e}_z \quad \|\vec{N}\| \cos(\beta) \quad F(-\cos \alpha \vec{e}_X + \sin \alpha \vec{e}_Y) \quad \vec{P} = -\|\vec{P}\| \vec{e}_y \quad \frac{3P - 6F}{3F + 2P}$$

$$\begin{pmatrix} -6 \\ -33 \\ 24 \end{pmatrix} \quad \|\vec{N}\| \sin(\beta) \quad m r v \sin(\alpha) \vec{e}_z \quad \begin{pmatrix} -6 \\ -33 \\ 24 \end{pmatrix} \quad -\|\vec{T}\| \sin(\gamma) \vec{e}_z \quad \begin{pmatrix} 7 \\ -14 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$-\ell F \sin \alpha \cos \alpha \quad \|\vec{R}\|(\cos(\theta + \alpha) \vec{e}_x + \sin(\theta + \alpha) \vec{e}_y) \quad -7 \quad \|\vec{R}\| \sin(\theta + \alpha)$$

$$-mg \left(\ell - \frac{L}{2} \cos \alpha \right) \vec{e}_z \quad \frac{2}{5} M R^2 \quad 0 \quad \|\vec{P}\| \|\vec{R}\| \cos(\theta + \alpha) \vec{e}_z \quad -\|\vec{T}\| \cos(\gamma)$$

$$\|\vec{N}\| \cos(\gamma + \beta) \vec{e}_z \quad \|\vec{R}\|(\cos(\alpha) \vec{e}_r + \sin(\alpha) \vec{e}_\theta) \quad \|\vec{P}\|(-\sin(\theta) \vec{e}_r - \cos(\theta) \vec{e}_\theta)$$

Fiche n° 10. Cinématique

Réponses

- 10.1 a) $1 \text{ h } 6 \text{ min } 40 \text{ s}$
- 10.1 b) $8 \text{ min } 20 \text{ s}$
- 10.2 a) $a_0 \times \tau_1$
- 10.2 b) $\frac{a_0 \times \tau_1^2}{2}$
- 10.2 c) $a_0 \times \tau_1 \times \left(\frac{\tau_1}{2} + \tau_2\right)$
- 10.3 $\textcircled{\text{c}}$
- 10.4 $\textcircled{\text{b}}$
- 10.5 a) $a(\cos(\theta)\vec{e}_x + \sin(\theta)\vec{e}_y)$
- 10.5 b) $a\left(\cos(\theta)\vec{e}_x + \left(\sin(\theta) + \frac{b}{a}\right)\vec{e}_y\right)$
- 10.5 c) $a\left(2\cos(\theta)\vec{e}_x + \left(2\sin(\theta) + \frac{b}{a}\right)\vec{e}_y\right)$
- 10.5 d) $-b\vec{e}_y$
- 10.6 a) $r(\cos(\theta)\vec{e}_x + \sin(\theta)\vec{e}_y)$
- 10.6 b) $r\vec{e}_r$
- 10.6 c) $r(\cos(\theta)\vec{e}_x + \sin(\theta)\vec{e}_y) + z\vec{e}_z$
- 10.6 d) $r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$
- 10.7 a) $|r \sin(\theta)|$
- 10.7 b) $r \sin(\theta)(\cos(\varphi)\vec{e}_x + \sin(\varphi)\vec{e}_y)$
- 10.7 c) ... $r \sin(\theta)(\cos(\varphi)\vec{e}_x + \sin(\varphi)\vec{e}_y) + r \cos(\theta)\vec{e}_z$
- 10.7 d) $r\vec{e}_r$
- 10.7 e) $\cos(\theta)\vec{e}_r - \sin(\theta)\vec{e}_\theta$
- 10.8 a) $49,4 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$
- 10.8 b) $8,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
- 10.9 a) $a\omega(-\sin(\omega t)\vec{e}_x + \cos(\omega t)\vec{e}_y) + b\vec{e}_z$

- 10.9 b) $\sqrt{(a\omega)^2 + b^2}$
- 10.9 c) $-a\omega^2(\cos(\omega t)\vec{e}_x + \sin(\omega t)\vec{e}_y)$
- 10.9 d) $a\omega^2$
- 10.10 a) $\cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y$
- 10.10 b) $\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta}(-\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y)$
- 10.10 c) $\vec{e}_x = \cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta$
- 10.10 d) $\vec{e}_y = \sin \theta \vec{e}_r + \cos \theta \vec{e}_\theta$
- 10.10 e) $\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta} \vec{e}_\theta$
- 10.11 a) $\frac{L}{T}$
- 10.11 b) $\frac{1}{T^2}$
- 10.11 c) $a\vec{e}_r$
- 10.11 d) $2abt^2\vec{e}_\theta$
- 10.11 e) $a\vec{e}_r + 2abt^2\vec{e}_\theta$
- 10.12 a) $r_0 e^{-t/\tau} \left(-\frac{1}{\tau} \vec{e}_r + \omega \vec{e}_\theta\right)$
- 10.12 b) $r_0 e^{-t/\tau} \left(\left(\frac{1}{\tau^2} - \omega^2\right) \vec{e}_r - \left(2\frac{\omega}{\tau}\right) \vec{e}_\theta\right)$
- 10.12 c) orthoradiale
- 10.12 d) décéléré
- 10.12 e) $r = r_0 e^{-\theta}$
- 10.13 a) $-at + v_0$
- 10.13 b) at
- 10.13 c) $-\frac{1}{2}at^2 + v_0 t$
- 10.13 d) $\frac{1}{2}at^2 + L$

10.13 e) **67 cm**
10.14 a) $v_{0x} t$
10.14 b) $-\frac{1}{2}gt^2 + v_{0z}t$

10.14 c) $z = -\frac{g}{2v_{0x}^2}x^2 + \frac{v_{0z}}{v_{0x}}x$
10.15 a) **1,7 s**
10.15 b) **2,9 m**

Fiche n° 11. Principe fondamental de la dynamique

Réponses

11.1	$\frac{p + m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$	11.9 c).....	$(v_0 t + x_0)\vec{e}_x + y_0\vec{e}_y + \frac{1}{2}gt^2\vec{e}_z$
11.2 a).....	$\sqrt{(mR\omega^2 - T)^2 + (mg)^2}$	11.10 a).....	$\cos(\theta)\vec{e}_x + \sin(\theta)\vec{e}_y$
11.2 b).....	$\arctan\left(\frac{mR\omega^2 - T}{mg}\right)$	11.10 b).....	$-\sin(\theta)\vec{e}_x + \cos(\theta)\vec{e}_y$
11.3 a).....	$a_0(t - t_0)$	11.10 c).....	$-\dot{\theta}\sin(\theta)\vec{e}_x + \dot{\theta}\cos(\theta)\vec{e}_y$
11.3 b).....	0	11.10 d).....	$-\dot{\theta}\cos(\theta)\vec{e}_x - \dot{\theta}\sin(\theta)\vec{e}_y$
11.3 c).....	$\frac{a_0}{k} [1 - e^{-k(t-t_0)}]$	11.10 e).....	$\dot{\theta}\vec{e}_\theta$
11.4 a).....	$\cos(\alpha)\vec{e}_x + \sin(\alpha)\vec{e}_y$	11.10 f).....	$-\dot{\theta}\vec{e}_r$
11.4 b).....	$-\sin(\alpha)\vec{e}_x + \cos(\alpha)\vec{e}_y$	11.11	Ⓒ
11.4 c).....	$\cos(\alpha)\vec{e}_x + \sin(\alpha)\vec{e}_y$	11.12 a).....	$\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$
11.4 d).....	$-\sin(\alpha)\vec{e}_x + \cos(\alpha)\vec{e}_y$	11.12 b).....	$(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta$
11.5 a).....	$-P\sin(\alpha)\vec{e}_x - P\cos(\alpha)\vec{e}_y$	11.13 a).....	2,2 N
11.5 b).....	$N\vec{e}_y$	11.13 b).....	0,46 rad
11.6 a).....	$P\cos(\theta)\vec{e}_r - P\sin(\theta)\vec{e}_\theta$	11.14 a).....	$(T' - T)\cos\theta$
11.6 b).....	$-T\vec{e}_r$	11.14 b).....	$(T' + T)\sin\theta - F$
11.6 c).....	$(P\cos(\theta) - T)\vec{e}_r - P\sin(\theta)\vec{e}_\theta$	11.14 c).....	1,17 kN
11.7 a).....	$P\vec{e}_x$	11.15	1,6 N
11.7 b).....	$-T\cos(\theta)\vec{e}_x - T\sin(\theta)\vec{e}_y$	11.16	864 N
11.7 c).....	$(P - T\cos(\theta))\vec{e}_x - T\sin(\theta)\vec{e}_y$	11.17 a).....	$P\cos\alpha$
11.8 a).....	$\left(\frac{1}{2}a_0t^2 + x_0\right)\vec{e}_x - v_0t\vec{e}_y + z_0\vec{e}_z$	11.17 b).....	$-m\frac{dv}{dt} + P\sin\alpha$
11.8 b).....	$a_0t\vec{e}_x - v_0\vec{e}_y$	11.18 a).....	$\frac{T_1}{2m}$
11.8 c).....	$a_0\vec{e}_x$	11.18 b).....	$g - \frac{T_2}{m}$
11.9 a).....	$g\vec{e}_z$	11.18 c).....	$\frac{g}{3}$
11.9 b).....	$v_0\vec{e}_x + gt\vec{e}_z$		

Fiche n° 12. Approche énergétique en mécanique

Réponses

12.1	(c)	12.9 a)	$\ddot{z} + \frac{\alpha}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = g + \frac{k\ell_0}{m}$
12.2 a)	$mg(\ell - y)$	12.9 b)	$\zeta + \frac{\alpha}{m}\dot{\zeta} + \frac{k}{m}\zeta = 0$
12.2 b)	$mg(x \sin(\alpha) - H)$	12.10 a)	(b)
12.2 c)	$-mgR \cos(\theta)$	12.10 b)	(d)
12.2 d)	$mgr(\cos(\psi) - 1) + E_0$	12.10 c)	(a)
12.3	(b)	12.10 d)	(c)
12.4 a)	$\frac{1}{2}k(y - \ell_0)^2 - \frac{k\ell_0^2}{2}$	12.11 a)	0
12.4 b) ..	$\frac{1}{2}k\left(\frac{x}{\cos(\beta)} - \ell_0\right)^2 - \frac{1}{2}k\left(\frac{L}{\sin(\beta)} - \ell_0\right)^2$	12.11 b)	0
12.4 c)	$E_0 + k(x - \ell_0)^2$	12.11 c)	0
12.5 a)	$-h\ell$	12.11 d)	a
12.5 b)	$-hR\alpha$	12.12 a)	(a)
12.5 c)	$-(2a + 2b)h$	12.12 b)	(a)
12.5 d)	$-(a + b + c)h$	12.12 c)	(a)
12.5 e)	(b)	12.12 d)	(b)
12.6	(c)	12.12 e)	(b)
12.7 a)	$1 - \frac{v_0^2}{2g\ell}$	12.12 f)	(b)
12.7 b)	$0,65 \text{ rad} = 37^\circ$	12.13 a)	(a), (c) et (d)
12.8 a)	$5,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$	12.13 b)	(b)
12.8 b)	$0,11 \text{ m}$	12.13 c)	(a), (c) et (d)
12.8 c)	$2,0 \text{ m}$	12.13 d)	(a) et (c)
		12.14	$33,6 \text{ m/s}$

Fiche n° 13. Moment cinétique

Réponses

13.1 a) $-\|\vec{P}\| \cos \theta$

13.1 b) $\|\vec{N}\| \cos(\gamma + \beta)$

13.1 c) $\|\vec{R}\| \sin(\theta + \alpha)$

13.1 d) $-\|\vec{T}\| \cos(\gamma)$

13.1 e) $\|\vec{N}\| \cos(\beta)$

13.1 f) $\|\vec{N}\| \sin(\beta)$

13.2 a) $\vec{P} = -\|\vec{P}\| \vec{e}_y$

13.2 b) $\|\vec{P}\|(-\sin(\theta) \vec{e}_r - \cos(\theta) \vec{e}_\theta)$

13.2 c) $-\|\vec{T}\| \vec{e}_y$

13.2 d) $\vec{T} = \|\vec{T}\|(-\cos(\gamma) \vec{e}_r + \sin(\gamma) \vec{e}_\theta)$

13.2 e) $\|\vec{R}\|(\cos(\theta + \alpha) \vec{e}_x + \sin(\theta + \alpha) \vec{e}_y)$

13.2 f) $\|\vec{R}\|(\cos(\alpha) \vec{e}_r + \sin(\alpha) \vec{e}_\theta)$

13.2 g) $\|\vec{N}\|(-\sin(\beta + \gamma) \vec{e}_x + \cos(\beta + \gamma) \vec{e}_y)$

13.2 h) $\|\vec{N}\|(\cos(\beta) \vec{e}_r + \sin(\beta) \vec{e}_\theta)$

13.3 a) $\|\vec{P}\| \|\vec{R}\| \cos(\theta + \alpha) \vec{e}_z$

13.3 b) $-\|\vec{T}\| \sin(\gamma) \vec{e}_z$

13.3 c) $\|\vec{N}\| \cos(\gamma + \beta) \vec{e}_z$

13.4 a) $\begin{pmatrix} -7 \\ 14 \\ -7 \end{pmatrix}$

13.4 b) $\begin{pmatrix} 7 \\ -14 \\ 7 \end{pmatrix}$

13.4 c) -7

13.4 d) -7

13.4 e) $\begin{pmatrix} -6 \\ -33 \\ 24 \end{pmatrix}$

13.4 f) $\begin{pmatrix} -6 \\ -33 \\ 24 \end{pmatrix}$

13.5 la Terre

13.6 $m r v \sin(\alpha) \vec{e}_z$

13.7 $\frac{1}{3} M L^2$

13.8 $\frac{1}{12} M L^2$

13.9 $\frac{2}{5} M R^2$

13.10 a) $-\ell F \sin \alpha \cos \alpha$

13.10 b) 0

13.11 a) $\frac{mgL}{2} \cos \alpha \vec{e}_z$

13.11 b) $-mg\left(\ell - \frac{L}{2} \cos \alpha\right) \vec{e}_z$

13.11 c) $-mg\left(\ell - \frac{L}{2} \cos \alpha\right) \vec{e}_z$

13.12 a) $\frac{a}{2} \vec{e}_X + a \vec{e}_Y$

13.12 b) $\frac{a}{2} \vec{e}_X + \frac{a}{3} \vec{e}_Y$

13.12 c) $P(-\sin \alpha \vec{e}_X - \cos \alpha \vec{e}_Y)$

13.12 d) $F(-\cos \alpha \vec{e}_X + \sin \alpha \vec{e}_Y)$

13.12 e) $aF\left(\frac{\sin \alpha}{2} + \cos \alpha\right) \vec{e}_z$

13.12 f) $aP\left(-\frac{\cos \alpha}{2} + \frac{\sin \alpha}{3}\right) \vec{e}_z$

13.12 g) $\frac{3P - 6F}{3F + 2P}$