

# Electromagnétisme Chap.7 – ARQS – Phénomène d'induction

## 1. ARQS magnétique

- 1.1. Définition de l'ARQS
- 1.2. ARQS magnétique : nullité du courant de déplacement
- 1.3. Deux conséquences de l'ARQS magnétique

## 2. Lois générales de l'induction dans l'ARQS magnétique

- 2.1. (*Rappel*) Loi de Faraday
- 2.2. (*Rappel*) Schéma équivalent d'un circuit filiforme (quasi-)fermé en présence d'induction
- 2.3. (*Rappel*) Loi de Lenz : une loi de modération
- 2.4. (*Rappel*) Cas d'une spire fixe en présence d'un champ dépendant du temps
- 2.5. (*Rappel*) Cas d'une spire mobile dans un champ stationnaire
- 2.6. Courants de Foucault dans un conducteur 3D

## 3. Auto-induction – Induction mutuelle (cadre ARQS)

- 3.1. (*Rappel*) Modélisation simplifiée d'un bobinage
- 3.2. (*Rappel*) Proportionnalité entre le champ magnétique et le courant qui le crée
- 3.3. (*Rappel*) Auto-induction : coefficient d'inductance propre
- 3.4. (*Rappel*) Mutuelle inductance : coefficients d'inductance mutuelle
- 3.5. Energie magnétique stockée par un circuit isolé
- 3.6. Energie magnétique stockée par un ensemble de deux circuits couplés par mutuelle
- 3.7. Exemples de couplage magnétique (parfait ou partiel)

## 4. Retour sur quelques notions de PCSI

- 4.1. Dispositif des rails de Laplace : interaction de deux tiges
- 4.2. Couple de Laplace sur un cadre rectangulaire
- 4.3. Moment magnétique – Aimants

Intro : On peut observer qu'un aimant en mouvement à l'intérieur d'une bobine génère une différence de potentiel à ses bornes, voire un courant si la bobine est connectée à un circuit fermé : *c'est le phénomène d'induction*, décrit en PCSI. On approfondit l'étude de ce phénomène dans ce chapitre, en revenant notamment sur les méthodes classiques pour étudier l'induction en exercice.

# 1. ARQS magnétique

## 1.1. Définition de l'ARQS

Comme en première année (étude des circuits électriques), les *régimes lentement variables*, appelés aussi *régimes quasi-stationnaires* ou *quasi-permanents*, caractérisent les situations où la vitesse de propagation de l'onde électromagnétique peut être considérée comme infinie.

Lors d'une modification en un point d'un circuit électrique, cette modification ne se fait pas ressentir instantanément en tout point du circuit. L'information est propagée par une onde électromagnétique. Dans le cadre de l'ARQS, on *néglige la durée de propagation de cette onde* d'un bout à l'autre du circuit *devant la durée caractéristique du régime variable* (ex : la période, si les signaux sont harmoniques).

En régime sinusoïdal, c'est équivalent à négliger la dimension du circuit devant la longueur d'onde de l'onde électromagnétique.

## 1.2. ARQS magnétique : nullité du courant de déplacement

### ARQS magnétique

*L'Approximation des RQS 'magnétique' revient à négliger le courant de déplacement dans l'équation de M-A :*

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j}$$

La démonstration n'est pas exigible au programme de PSI, mais on la donne pour l'aspect culturel. En notant  $L$  la longueur du circuit,  $T$  la période d'évolution des champs, et sachant que  $c^2 \epsilon_0 \mu_0 = 1$ , montrer par analyse dimensionnelle (ou « raisonnement par ordre de grandeur », comme en mécanique des fluides) que le terme de courant de déplacement de l'équation de Maxwell-Ampère est négligeable devant le rotationnel de  $B$  dans le cadre de l'ARQS magnétique. On notera que par rapport à « l'ARQS sans plus de précisions », « l'ARQS magnétique » suppose que le champ électrique est créé par les variations temporelles du champ magnétique : il n'existe pas de charges électriques qui seraient également sources du champ.

Cela implique que l'ARQS magnétique n'est pas applicable dans l'espace inter-armature d'un condensateur par exemple. Il existe pour ce type de situation une autre ARQS, « l'ARQS électrique ».

## 1.3. Deux conséquences de l'ARQS magnétique

### 1<sup>re</sup> conséquence de l'ARQS

*Les lois de la magnétostatique se généralisent aux cas des régimes lentement variables, car le Théorème d'Ampère est valide.*

### 2<sup>e</sup> conséquence de l'ARQS

*La loi des nœuds est valide dans le cadre de l'ARQS*

- ❖ Démontrer cette deuxième conséquence (même démonstration que l'établissement de l'équation locale de conservation de la charge à partir des équations de Maxwell, cf. chapitre 1)

*L'ARQS magnétique est un cadre théorique important car valide pour de nombreuses applications, industrielles notamment : définition des inductances propres et mutuelles, transformateurs, effets inductifs dans les circuits électriques, freinage par courants de Foucault, machines électriques (moteurs et alternateurs), etc.*

## 2. Lois générales de l'induction dans l'ARQS magnétique

### 2.1. (Rappel) Loi de Faraday

#### Loi de Faraday

On considère un **circuit filiforme fermé**, ou dont l'ouverture est très étroite devant la longueur du circuit.  
S'il est plongé dans un champ magnétique dont le **flux  $\Phi$  à travers le circuit** varie avec le temps,  
il est alors le siège d'une **force électromotrice  $e$**  telle que :

$$e = - \frac{d\Phi}{dt}$$

où  $\Phi = \iint \vec{B} \cdot \vec{dS}$  est le flux du champ magnétique à travers la surface délimitée par le circuit fermé  
où  $e \stackrel{\text{def}}{=} \int \vec{E} \cdot \vec{d\ell}$  est la circulation du champ électrique le long du circuit (en Volts)

- ❖ Démontrer cette loi à partir de l'équation de M-F. Pourquoi le champ électrique n'est-il plus à circulation conservative ?

### 2.2. (Rappel) Schéma équivalent d'un circuit filiforme (quasi-)fermé en présence d'induction

#### Schéma équivalent d'un conducteur ohmique soumis à l'induction

Après avoir orienté le courant qui le traverse, un circuit filiforme fermé (ou quasi-fermé)  
est modélisable par le schéma électrique équivalent suivant :

sa résistance  $R_{AB}$  en série avec une source idéale de tension  $e_{AB}$  orientée en convention générateur.

- ❖ En déduire ce qu'on appelle parfois « la loi d'ohm généralisée » aux bornes d'un circuit quasi-fermé soumis à l'induction (convention récepteur) :

$$u_{AB} = R_{AB} i_{AB} - e_{AB}$$

Il est préférable de ne pas apprendre cette formule par cœur, car elle dépend de la convention d'orientation du dipôle formé par le circuit. Il vaut mieux la retrouver à partir du schéma équivalent donné précédemment.

#### Les 3 situations simples où l'on peut utiliser Faraday et le schéma équivalent

Circuit fixe dans un champ uniforme variable dans le temps

Circuit mobile dans un champ permanent non-uniforme

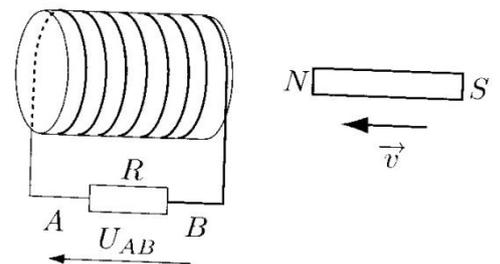
Circuit déformable dans un champ permanent et uniforme

On peut bien-sûr imaginer la situation générale où le circuit est mobile et se déforme dans un champ quelconque

Remarque : Si un tronçon de conducteur *non-fermé* est en mouvement par rapport aux lignes de champ magnétique, l'induction existe toujours et une f.é.m. apparaît tout le long du tronçon. Cette f.é.m. n'est par contre plus calculable par la loi de Faraday que l'on a vue. Il faut faire appel à la notion de « champ électromoteur » (hors nouveaux programmes) ou à la notion de « flux coupé » (hors programme depuis longtemps).

#### Exo pour se familiariser avec les conventions d'orientation et les signes :

On déplace un barreau aimanté à vitesse constante vers l'intérieur d'une bobine. On rappelle que le champ magnétique créé par un aimant sort de l'aimant par le pôle nord, et y entre par le pôle sud. Localement au niveau du pôle nord, le champ est colinéaire au barreau.



- ❖ Quel est le signe de la différence de potentiel  $U_{AB}$  ?

### 2.3. (Rappel) Loi de Lenz : une loi de modération

#### Loi de Lenz

*Les conséquences de l'induction tendent à s'opposer aux causes qui lui ont donné naissance.*

- ❖ Dans chacun des deux exemples suivants (spire fixe dans champ dépendant du temps, puis spire mobile dans champ non-uniforme), une des questions consiste à remarquer comment se manifeste cette loi de modération. Trouver laquelle !

### 2.4. (Rappel) Cas d'une spire fixe en présence d'un champ dépendant du temps

Soit une spire circulaire de rayon  $a$ , horizontale, plongée dans un champ magnétique vertical, uniforme et variable dans le temps :  $\vec{B} = B_0 \cos(\omega t) \vec{e}_z$

- ❖ Déterminer la fém induite dans la spire.
- ❖ La résistance totale de la spire vaut  $R$ . En vous appuyant sur un schéma électrique équivalent de la spire, en déduire l'intensité du courant induit dans la spire.
- ❖ En plaçant un ampèremètre sur la spire, expliquer comment utiliser ce dispositif pour mesurer le champ magnétique environnant. L'utilisation d'un bobinage ( $N$  spires) permet-il d'optimiser le dispositif ?
- ❖ Qu'en est-il si l'on ouvre légèrement la spire et que l'on mesure la tension à ses bornes ?
- ❖ Déterminer qualitativement la direction et le sens du champ magnétique créé par le courant circulant dans la spire. Que remarque-t-on ?

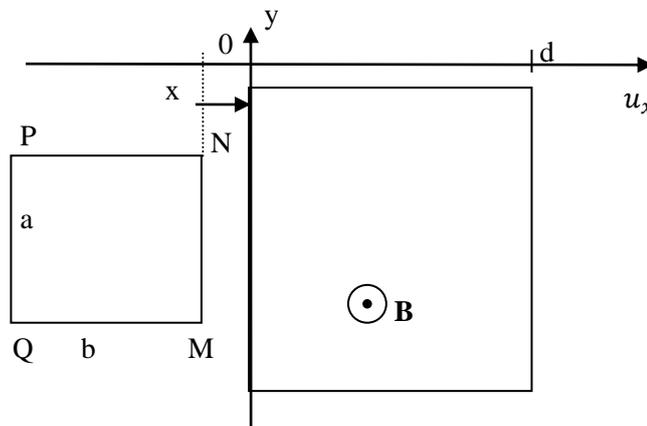
### 2.5. (Rappel) Cas d'une spire mobile dans un champ stationnaire

Un cadre métallique rectangulaire mobile de côtés  $a$  et  $b$ , de résistance  $R$ , est en translation parallèlement à  $Ox$ .

Il traverse une zone de longueur  $d > b$  dans laquelle règne un champ magnétique uniforme  $\vec{B}$ .

En dehors de cette zone on admet que le champ est nul. On néglige l'effet de la pesanteur sur le cadre.

La vitesse du cadre avant qu'il ne pénètre dans la zone est  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$ .



- ❖ Expliquer qualitativement ce qu'il se passe pour le cadre lorsqu'il pénètre dans la zone magnétique
- ❖ Déterminer l'équation différentielle vérifiée par  $v(t)$  en posant  $\alpha = B^2 a^2 / mR$
- ❖ En déduire celle vérifiée par  $v(x)$ . La résoudre et montrer que  $v(x)$  est une fonction affine.
- ❖ On note  $v_1$  la vitesse du cadre lorsqu'il a entièrement pénétré dans la zone. Quelle valeur limite doit prendre  $v_0$  pour que le cadre puisse effectivement pénétrer dans la zone ?
- ❖ Pendant la phase de pénétration, déterminer la puissance des forces de Laplace agissant sur le cadre
- ❖ Déterminer aussi la puissance fournie par la f.é.m. au circuit. Conclure.

*La puissance fournie aux électrons par la f.é.m. d'induction est opposée à la puissance mécanique reçue par la barre soumise aux forces de Laplace. Ce résultat est général et traduit la **conversion électro-mécanique**.*

Une façon de se souvenir intuitivement de ce résultat est de remarquer que :

- lorsque les forces de Laplace tendent à ralentir un conducteur, la f.é.m. tend à créer/amplifier le courant
- lorsque les forces de Laplace tendent à accélérer un conducteur, la f.é.m. tend à diminuer le courant

## 2.6. Courants de Foucault dans un conducteur 3D

C'est le nom donné aux *courants induits dans un conducteur volumique* (i.e. 3D, non-assimilable à un fil). Quelques applications des courants de Foucault :

- plaques à induction (cuisinières)
- freinage poids lourds

Si l'on souhaite étudier l'existence de courants de Foucault dans un conducteur 3D, on doit déterminer le courant induit en chaque point du conducteur : c'est une étude locale. Il faut donc utiliser les équations de Maxwell. Contrairement à la magnétostatique, il existe un champ électrique, généré par les variations temporelles du champ magnétique : on parle de *champ électrique induit*. C'est ce champ qui met en mouvement les porteurs de charge du conducteur via la composante électrique de la force de Lorentz. Lors de l'étude des circuits filiformes, ce rôle était joué par la force électromotrice, qui n'était rien d'autre que « la version intégrée » du champ électrique induit.

On étudie ci-dessous un dispositif simple : un conducteur ohmique cylindrique homogène, soumis à un champ magnétique extérieur parallèle à son axe, oscillant et uniforme. On souhaite décrire les courants de Foucault induits, ainsi que les pertes par effet Joule qu'ils engendrent.

Soit un cylindre métallique d'axe Oz, de hauteur  $h$  et de rayon  $a \ll h$ , soumis à un champ magnétique uniforme et oscillant sinusoidalement dans le temps :

$$\vec{B} = B_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$$

Ce champ peut par exemple avoir été réalisé par un solénoïde entourant le conducteur métallique.

La conductivité du métal est  $\gamma$ .

Hypothèses simplificatrices :

- on néglige les effets de bord (i.e. on considère le cylindre de longueur infinie)
  - on admet que le champ créé par les courants induits est négligeable devant le champ appliqué : en conséquence le champ à l'intérieur du conducteur est identique au champ extérieur appliqué
- ❖ Rappeler qualitativement pourquoi ce champ magnétique variable induit des courants dans le conducteur. La densité de ces courants est notée  $\vec{j}$ .
- ❖ Indépendamment de la situation étudiée, en remarquant d'après les équations de Maxwell que le terme  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  joue pour  $\vec{E}$  le rôle que le courant  $\vec{j}$  joue pour  $\vec{B}$ , et par analogie avec les règles vues en magnétostatique, donner le comportement du champ électrique vis-à-vis des plans de symétrie du champ  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
- ❖ En déduire que le courant induit  $\vec{j}$  est orienté selon  $\vec{u}_\theta$ . En procédant de même avec les invariances, montrer que  $\vec{j}$  ne dépend que de  $r$ .
- ❖ Déterminer alors  $\vec{j}$  de deux manières différentes :
- à l'aide de Maxwell-Faraday en utilisant le formulaire ci-dessous
  - en utilisant sa version intégrée (loi de Faraday) sur une ligne de courant
- On donne :  $\vec{rot} \vec{A} \cdot \vec{u}_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta}$
- ❖ Etablir l'expression de la puissance moyenne dissipée par effet Joule dans le cylindre :

$$\langle P_{Joule} \rangle = \frac{\pi}{16} \gamma B_0^2 \omega^2 a^4 h$$

❖ Comment régler les paramètres afin d'optimiser ce dispositif pour chauffer des casseroles par induction ?

❖ On remplace le barreau précédent par N petits barreaux isolés de rayons  $a' < a$ , de hauteur  $h$  remplissant le même volume (N grand). Calculer la puissance moyenne dissipée par effet Joule dans cet ensemble. Conclure sur l'utilité du feuilletage des tôles pour diminuer les pertes énergétiques dues aux courants de Foucault

- ⊛ (bonus hors programme) En considérant les courants induits comme un emboîtement de solénoïdes, déterminer le champ magnétique induit sur l'axe du cylindre, et montrer qu'il est bien négligeable devant le champ extérieur si  $a \ll \delta$ , avec  $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$  (épaisseur de peau)

**Remarque :** Les cuisinières à induction génèrent des champs d'intensité de l'ordre du champ terrestre  $0,5 \cdot 10^{-4} T$ . La fréquence du champ est de l'ordre de qq  $10 \text{ kHz}$ . Pour augmenter la puissance thermique dissipée dans le fond des casseroles à induction, celles-ci tirent aussi parti des pertes par hystérésis (ferromagnétiques non-linéaires, cf. prochain chapitre) et de l'effet de peau (augmentation de la résistance donc de l'effet Joule, cf. chapitre sur les ondes EMic).

**Remarque :** On peut montrer que les effets du champ magnétique induit (créé par les courants induits) doivent être pris en compte lorsque « l'effet de peau » n'est plus négligeable. Nous décrivons ce phénomène lors de l'étude des ondes électromagnétiques, mais on peut déjà le décrire ici. L'effet de peau désigne le fait que les courants sont localisés dans une petite épaisseur au bordure du cylindre de l'exemple étudié. Pour être plus précis, ils existent en tout point du cylindre, mais leur intensité décroît exponentiellement lorsqu'on s'approche de l'axe du cylindre, avec une distance caractéristique que l'on nomme « épaisseur de peau ». On montre aussi que les autres champs (champ électrique et champ magnétique) sont aussi localisés dans l'épaisseur de peau et sont presque nuls au centre du cylindre. Ce phénomène n'apparaît que lorsque la fréquence est suffisamment élevée. On peut retenir que l'effet de peau est significatif lorsque le *champ magnétique induit* n'est plus négligeable (on l'a négligé dans notre étude).

A noter que cette tendance du *champ magnétique induit* à annuler le courant (et le champ électromagnétique) au centre du cylindre est une manifestation élégante de la loi de Lenz. C'est surtout le centre qui est touché, car les bords du conducteur sont au contact de l'air, zone dans laquelle il n'y a pas d'induction. Les bords sont donc moins soumis aux effets de l'induction. C'est pourquoi les champs tendent à s'annuler au centre, et persistent sur les bords.

### 3. Auto-induction – Induction mutuelle (cadre ARQS)

Tout ce qui concerne l'auto-induction et l'induction mutuelle sera étudié dans le cadre de l'ARQS.

#### 3.1. (Rappel) Modélisation simplifiée d'un bobinage

Tout ce qui suit est valable pour les circuits filiformes fermés, mais les coefficients d'inductance prennent des **valeurs non-négligeables en présence de bobinages**, dont la géométrie amplifie les effets de l'induction.

*Sauf indication contraire, on modélisera toujours une couche de bobinage comme **une succession de spires jointives planes parcourues par le même courant**. Les espaces inter-spires seront négligés.*

#### 3.2. (Rappel) Proportionnalité entre le champ magnétique et le courant qui le crée

Dans tous les exemples traités en magnétostatique, les champs magnétiques créés étaient proportionnels au courant qui leur donnait naissance. On admet que cette propriété est générale. Elle se démontre facilement à partir des expressions intégrales : loi Biot et Savart (hors nouveaux programmes). Dans le cadre de l'ARQS, cette propriété reste valide.

#### 3.3. (Rappel) Auto-induction : coefficient d'inductance propre

Un circuit traversé par un courant variable **créé à travers lui même** un champ magnétique 'propre'. Le flux de ce champ propre à travers le circuit est proportionnel à  $i_{propre}(t)$  et est appelé flux propre  $\Phi_{propre}$ .

On parle **d'auto-induction**.

**Définition de l'inductance propre**  
(ou coefficient d'auto-inductance)

$$L \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Phi_{\text{propre}}}{i_{\text{propre}}}$$

où  $\Phi_{\text{propre}}$  est le flux propre, créé par le circuit à travers lui-même.

$L \geq 0$  et ne dépend que de la **géométrie** du circuit.

Sa définition traduit simplement une relation de **proportionnalité** entre le flux et le courant qui le crée.

NB : On montrera plus loin que L est toujours positif

- ❖ Etablir l'expression de l'inductance d'un solénoïde de longueur  $\ell$ , de section  $S$ , constitué de  $N$  spires, assimilé (pour le calcul du champ) à un solénoïde infini :  $L = \mu_0 N^2 S / \ell$
- ❖ Démontrer l'expression  $u = L \frac{di}{dt}$  admise jusqu'à présent en électrocinétique dans le cas d'un bobinage dont on néglige la résistance des fils

3.4. (Rappel) Mutuelle inductance : coefficients d'inductance mutuelle

Soient deux circuits  $C_1$  et  $C_2$  parcourus par les courants  $i_1(t)$  et  $i_2(t)$ .

Le champ magnétique généré par  $C_1$  crée dans  $C_2$  un flux  $\Phi_{1 \rightarrow 2}$ , proportionnel à  $i_1(t)$  dans le cadre de l'ARQS.

Le champ magnétique généré par  $C_2$  crée dans  $C_1$  un flux  $\Phi_{2 \rightarrow 1}$ , proportionnel à  $i_2(t)$  dans le cadre de l'ARQS.

**Définition des deux coefficients d'inductance mutuelle**

$$M_{1 \rightarrow 2} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Phi_{1 \rightarrow 2}}{i_1}$$

$$M_{2 \rightarrow 1} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Phi_{2 \rightarrow 1}}{i_2}$$

Ils ne dépendent que de la **géométrie** de chaque circuit et de leur **disposition relative** l'un par rapport à l'autre.

Ils sont **algébriques** (comme les flux), leur signe dépend de l'orientation (arbitraire) des surfaces.

Leur définition traduit simplement une relation de **proportionnalité** entre le flux et le courant qui le crée.  
même unité que L : Henry (H)

**Propriété** (admise)

$$M_{1 \rightarrow 2} = M_{2 \rightarrow 1}$$

- ❖ En tenant compte des inductances propres et des inductances mutuelles, exprimer le flux magnétique total  $\Phi_1$  à travers le circuit  $C_1$  en fonction de  $i_1$  et  $i_2$ . Idem pour le flux magnétique dans  $C_2$ .

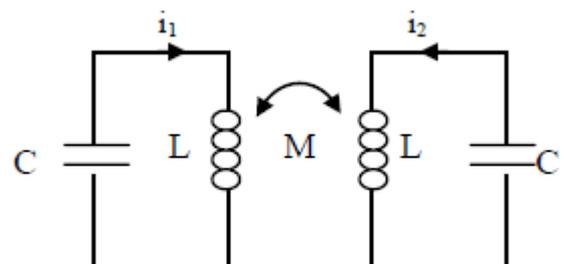
**Deux schémas équivalents possibles d'un bobinage en présence de mutuelle induction**

Soit on modélise le bobinage par une **inductance propre + une fém de mutuelle induction**  
Soit on modélise le bobinage par une **fém « totale »** regroupant l'induction propre et mutuelle.

Exemple : Circuits couplés par mutuelle, deux bobines face-à-face

On considère les circuits ci-contre dans lequel les deux bobines et les deux condensateurs sont identiques ; les deux circuits sont dits couplés par leur coefficient d'inductance mutuelle M.

Déterminer les équations différentielles vérifiées par  $i_1$  et  $i_2$ .



### 3.5. Energie magnétique stockée par un circuit isolé

On considère l'établissement du courant dans un circuit isolé de toute influence magnétique extérieure. La résistance du circuit est  $R$  et son inductance propre  $L$ . Ce circuit est relié à une source idéale de tension  $E_1(t)$ .

- ❖ Dessiner un schéma équivalent de ce circuit (modéliser l'induction par une fém)
- ❖ Par un bilan de puissance, déterminer l'expression de l'énergie magnétique emmagasinée par le circuit.
  
- ❖ Dans le cas d'un solénoïde (supposé infiniment long pour établir l'expression du champ), montrer que l'expression de l'énergie magnétique volumique du chap.1 permet bien de retrouver l'expression de l'énergie magnétique stockée par la bobine.
- ❖ En déduire une conséquence sur le signe de l'inductance propre du solénoïde

Ce résultat est général, valable pour toute géométrie du circuit (pas uniquement solénoïde).

**Energie stockée par un circuit**  
(généralement un bobinage)

$$E_{mag} = \frac{1}{2} L i^2$$

### 3.6. Energie magnétique stockée par un ensemble de deux circuits couplés par mutuelle

On considère l'établissement du courant dans deux circuits  $C_1$  e  $C_2$  couplés par mutuelle inductance.

On tient aussi compte des inductances propres de chaque circuit. Le premier circuit est alimenté par une source idéale de tension  $E_1(t)$ , et le deuxième par une autre source  $E_2(t)$ .

- ❖ Dessiner un schéma équivalent des deux circuits (modéliser l'induction par une fém).
- ❖ Par deux bilans de puissance incluant les deux circuits, établir l'expression de l'énergie magnétique emmagasinée par l'ensemble des deux circuits.

**Energie stockée par un ensemble de deux circuits couplés**  
(généralement deux bobinages)

$$E_{mag} = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2$$

$$M^2 \leq L_1 L_2$$

**Egalité** lorsque le couplage est *parfait* : toutes les lignes de champ créées par un circuit traversent le 2e

- ❖ Démontrer cette inégalité en invoquant :
  - que l'énergie magnétique  $E_{mag}$  est nécessairement positive ou nulle (cf. expression intégrale)
  - que son expression est valide quelque soient les valeurs des courants  $i_1$  et  $i_2$  (faire apparaître un polynôme en  $x = i_1/i_2$  et dire que le discriminant est positif ou nul)
- ⊛ Dans le cas d'un couplage parfait, montrer qu'il existe une valeur du rapport  $i_1/i_2$  qui annule l'énergie magnétique (donc le champ magnétique en tout point de l'espace). L'exprimer en fonction de  $L_1$  et  $L_2$ .

### 3.7. Exemples de couplage magnétique (parfait ou partiel)

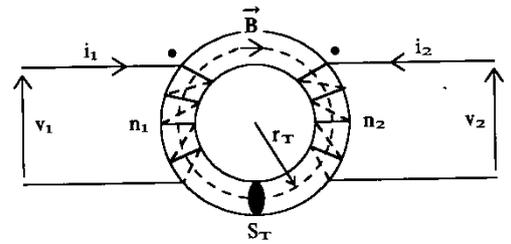
Voici quelques configurations particulières de couplage entre deux bobines identiques disponibles en TP. La valeur expérimentale de l'inductance mutuelle est précisée dans chaque cas :

- deux bobines intriquées réalisent un couplage parfait (une spire de l'une succède à une spire de l'autre)  $M \sim L$
- deux bobines mises l'une contre l'autre, axes confondus :  $M \sim L/5$
- deux bobines mises l'une contre l'autre, axes orthogonaux :  $M \sim L/20$
- deux bobines couplées par l'intermédiaire d'un « circuit ferromagnétique » réalisent un couplage quasi-parfait. C'est un des intérêts majeurs des matériaux ferromagnétiques (cf. schéma ci-dessous) :  $M \sim 0,9 L$

Exercice : Transformateur idéal = couplage magnétique parfait grâce à un ferromagnétique

On étudie un transformateur constitué de deux bobinages, l'un de  $n_1$  spires dit « primaire », l'autre de  $n_2$  spires dit « secondaire », enroulés sur un noyau de fer. On suppose que le transformateur est idéal :

- on néglige les résistances des enroulements
- le matériau ferromagnétique canalise parfaitement les lignes de champ : le flux de  $\vec{B}$  est identique à travers chaque spire (= couplage parfait)
- on néglige la présence de courants de Foucault dans le ferromagnétique



a) Calculer  $v_1$  et  $v_2$  en fonction  $n_1$ ,  $n_2$  et  $\Phi$ , flux de  $\vec{B}$  à travers une spire. En déduire  $v_2 / v_1 = n_2/n_1$ .

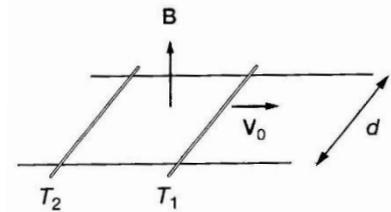
b) Les deux bobines ont des coefficients d'inductance propre  $L_1$  et  $L_2$  et un coefficient d'inductance mutuelle  $M$ . Ecrire  $v_1$  et  $v_2$  en fonction de  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $L_1$ ,  $L_2$  et  $M$ , et montrer que pour un transformateur parfait  $M^2 = L_1L_2$ . Conclure.

## 4. Retour sur quelques notions de PCSI

### 4.1. Dispositif des rails de Laplace : interaction de deux tiges

Deux tiges  $T_1$  et  $T_2$  identiques (de masse  $m$ ) sont mobiles sans frottements sur deux rails parallèles (distance  $d$ ) situés dans un plan horizontal. Un champ magnétique permanent uniforme et vertical règne en tout point.

A l'instant initial, la tige  $T_1$  est animée d'une vitesse  $\vec{v}_0$ , tandis que  $T_2$  est immobile. La résistance électrique de chaque tige est égale à  $R/2$  et on néglige la résistance des rails.



1. Par une analyse qualitative, expliquer pourquoi la tige  $T_2$  va se mettre en mouvement, tandis que  $T_1$  va ralentir.

2. Déterminer l'expression de l'intensité du courant induit dans le circuit. Etablir alors les deux équations différentielles vérifiées par les vitesses  $v_1$  et  $v_2$  de chacune des tiges.

3. Déterminer l'évolution temporelle de  $(v_1 + v_2)$  et de  $(v_1 - v_2)$ . En déduire l'évolution temporelle de chacune des vitesses. Interpréter les résultats obtenus.

Un bilan de puissance mécanique et électrique mettrait en évidence le même résultat que celui trouvé au paragraphe 2.4 : la puissance mécanique reçue par les barres soumises aux forces de Laplace est égale à la puissance fournie par la f.é.m. d'induction aux porteurs de charge. On retrouve le principe de la conversion électromécanique de puissance.

### 4.2. Couple de Laplace sur un cadre rectangulaire

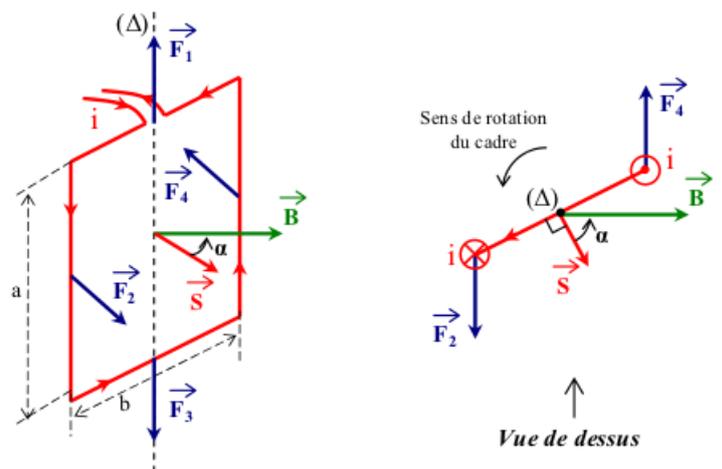
On considère le dispositif représenté sur la figure ci-contre. Un cadre rectangulaire, traversé par un courant  $i$  car branché à une alimentation, est placé verticalement dans un champ magnétique horizontal et uniforme.

On souhaite montrer que le moment résultant est un couple qui peut s'écrire :

$$\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}$$

avec

$$\vec{M} = i\vec{S}$$



- ⊛ Expliquer pourquoi la résultante des forces est nulle
- ⊛ Expliquer pourquoi le couple résultant s'exerce sur les deux côtés verticaux du cadre
- ⊛ En remarquant que le bras de levier de chaque force élémentaire est le même, calculer simplement le couple résultant à partir des deux forces de Laplace s'exerçant sur les côtés verticaux

### 4.3. Moment magnétique – Aimants

- ❖ Rappeler la définition d'un moment magnétique
- ❖ Dessiner l'allure des lignes de champs loin du moment magnétique
- ❖ Comment peut-on en déduire l'allure des lignes de champ générées par un aimant droit ?
- ❖ Quelles sont les actions subies par un moment magnétique (aimant ou spire de courant) placé dans un champ magnétique extérieur uniforme ?
- ❖ Repérer les positions d'équilibre, et discuter de leur stabilité : application courante ?

*Manip :*

- *Freinage courant de Foucault : oscillations « camembert » métallique dans l'entrefer d'un électroaimant*
- *Foucault : chute ralentie d'un aimant dans un tube en cuivre + effet d'une fente verticale dans le cuivre*
- *Action motrice d'un champ magnétique tournant sur l'aiguille d'une boussole*
- *Mesure d'inductances mutuelles*

Le bloc 5 étudie l'électromagnétisme en régime variable, principalement dans l'ARQS magnétique afin d'établir le lien avec le cours sur l'induction de première année. La notion de champ électromoteur est hors programme, la fem induite est calculée avec la loi de Faraday. Cette partie prépare également le cours sur la conversion de puissance en abordant les courants de Foucault et l'énergie magnétique.

| Notions et contenus                     | Capacités exigibles   |
|---|---|
| <b>5. Electromagnétisme dans l'ARQS</b> |   |
| Courants de déplacement.                | Vérifier que le terme de courant de déplacement permet d'assurer la compatibilité des équations de Maxwell avec la conservation de la charge.   |
| ARQS magnétique.                        | Simplifier les équations de Maxwell et l'équation de conservation de la charge dans l'ARQS en admettant que les courants de déplacement sont négligeables.<br><br>Étendre le domaine de validité des expressions des champs magnétiques obtenues en régime stationnaire.            |
| Induction.                              | Relier la circulation de $E$ à la dérivée temporelle du flux magnétique, faire qualitativement le lien avec la loi de Faraday vue en première année.  |
| Courants de Foucault.                   | Dans le cas d'un conducteur cylindrique soumis à un champ magnétique parallèle à son axe, uniforme et oscillant, décrire la géométrie des courants de Foucault, exprimer la puissance dissipée par effet Joule en négligeant le champ propre. Expliquer l'influence du feuilletage. |
| Energie magnétique.                     | Exprimer l'énergie magnétique d'une bobine seule ou de deux bobines couplées en fonction des coefficients d'inductance et des intensités.   |
| Densité volumique d'énergie magnétique. | Citer l'expression de la densité volumique d'énergie magnétique. La retrouver dans le cas de la bobine dont on néglige les effets de bord à partir de la relation $E = \frac{1}{2} Li^2$ .  |
| Couplage partiel, couplage parfait.     | Exploiter la continuité temporelle du flux magnétique.<br><br>Dans le cas de deux bobines couplées, établir l'inégalité $M^2 \leq L_1 L_2$ .  |

## Révisions de PCSI

### 4. Induction et forces de Laplace

#### Présentation

Cette partie est nouvelle pour les étudiants, puisque seule une approche descriptive du champ magnétique a fait l'objet d'une présentation en classe de première S. Cette partie s'appuie sur les nombreuses applications présentes dans notre environnement immédiat : boussole, moteur électrique, alternateur, transformateur, haut-parleur, plaques à induction, carte RFID... Il s'agit de restituer toute la richesse de ces applications dans un volume horaire modeste, ce qui limite les géométries envisagées et le formalisme utilisé. Le point de vue adopté cherche à mettre l'accent sur les phénomènes et sur la modélisation sommaire de leurs applications. L'étude sera menée à partir du flux magnétique en n'envisageant que des champs magnétiques uniformes à l'échelle de la taille des systèmes étudiés. Toute étude du champ électromoteur est exclue. L'induction et les forces de Laplace dans un circuit mobile sont introduites dans le cas d'un champ uniforme et stationnaire, soit dans le modèle des rails de Laplace, soit dans celui d'un cadre rectangulaire en rotation. Ce dernier modèle permet d'introduire la notion de dipôle magnétique et une analogie de comportement permet de l'étendre au cas de l'aiguille d'une boussole.

Le succès de cet enseignement au niveau de la classe de PCSI suppose le respect de ces limitations : cet enseignement n'est pas une étude générale des phénomènes d'induction. Corrélativement, l'enseignement de cette partie doit impérativement s'appuyer sur une démarche expérimentale authentique, qu'il s'agisse d'expériences de cours ou d'activités expérimentales.

Le **bloc 1. « Champ magnétique »** vise à faire le lien avec le programme de la classe de première S et à permettre à l'étudiant de disposer des outils minimaux nécessaires ; l'accent est mis sur le concept de champ vectoriel, sur l'exploitation des représentations graphiques et sur la connaissance d'ordres de grandeur. Une étude plus approfondie de la magnétostatique sera conduite en seconde année.

| Notions et contenus                                       | Capacités exigibles  |
|---|--|
| <b>1. Champ magnétique</b>                                |  |
| Sources de champ magnétique ; cartes de champ magnétique. | Exploiter une représentation graphique d'un champ vectoriel, identifier les zones de champ uniforme, de champ faible, et l'emplacement des sources.<br><br>Connaître l'allure des cartes de champs magnétiques pour un aimant droit, une spire circulaire et une bobine longue.<br><br>Décrire un dispositif permettant de réaliser un champ magnétique quasi uniforme.<br><br>Connaître des ordres de grandeur de champs magnétiques : au voisinage d'aimants, dans un appareil d'IRM, dans le cas du champ magnétique terrestre. |
| Lien entre le champ magnétique et l'intensité du courant. | Évaluer l'ordre de grandeur d'un champ magnétique à partir d'expressions fournies.<br><br>Orienter le champ magnétique créé par une bobine « infinie » et connaître son expression.  |
| Moment magnétique.  | Définir le moment magnétique associé à une boucle de courant plane.<br><br>Par analogie avec une boucle de courant, associer à un aimant un moment magnétique.<br><br>Connaître un ordre de grandeur du moment magnétique associé à un aimant usuel.   |

Dans le **bloc 2. « Actions d'un champ magnétique »**, le professeur est libre d'introduire la force de Laplace avec ou sans référence à la force de Lorentz. Il s'agit ici de se doter d'expressions opérationnelles pour étudier le mouvement dans un champ uniforme et stationnaire (soit d'une barre en translation, soit d'un moment magnétique en rotation modélisé par un cadre rectangulaire).

| Notions et contenus   | Capacités exigibles  |
|---|--|
| <b>2. Actions d'un champ magnétique</b>   |  |
| Densité linéique de la force de Laplace dans le cas d'un élément de courant filiforme.<br><br>Résultante et puissance des forces de Laplace s'exerçant sur une barre conductrice en translation rectiligne sur deux rails parallèles (rails de Laplace) dans un champ magnétique extérieur uniforme, stationnaire et orthogonal à la barre. | Différencier le champ magnétique extérieur subi du champ magnétique propre créé par le courant filiforme.<br><br>Établir et connaître l'expression de la résultante des forces de Laplace dans le cas d'une barre conductrice placée dans un champ magnétique extérieur uniforme et stationnaire.<br><br>Évaluer la puissance des forces de Laplace. |
| Couple et puissance des actions mécaniques de Laplace dans le cas d'une spire rectangulaire, parcourue par un courant, en rotation autour d'un axe de symétrie de la spire passant par les deux milieux de côtés opposés et placée dans un champ magnétique extérieur uniforme et stationnaire orthogonal à l'axe.                          | Établir et connaître l'expression du moment du couple subi en fonction du champ magnétique extérieur et du moment magnétique de la spire rectangulaire.  |
| Action d'un champ magnétique extérieur uniforme sur un aimant.<br>Positions d'équilibre et stabilité.   | <b>Mettre en œuvre un dispositif expérimental pour étudier l'action d'un champ magnétique uniforme sur une boussole.</b>   |
| Effet moteur d'un champ magnétique tournant.  | <b>Créer un champ magnétique tournant à l'aide de deux ou trois bobines et mettre en rotation une aiguille aimantée.</b>   |

Le **bloc 3. « Lois de l'induction »** repose sur la loi de Faraday  $e = -\frac{d\phi}{dt}$  qui se prête parfaitement à une introduction expérimentale et qui peut constituer un bel exemple d'illustration de l'histoire des sciences. On n'omettra pas, à ce sujet, d'évoquer les différents points de vue possibles sur le même phénomène selon le référentiel dans lequel on se place.

| Notions et contenus  | Capacités exigibles   |
|--|---|
| <b>3. Lois de l'induction</b>  |   |
| <u>Flux d'un champ magnétique.</u><br><br>Flux d'un champ magnétique à travers une surface s'appuyant sur un contour fermé orienté.  | Évaluer le flux d'un champ magnétique uniforme à travers une surface s'appuyant sur un contour fermé orienté plan.  |
| <u>Loi de Faraday.</u><br><br>Courant induit par le déplacement relatif d'une boucle conductrice par rapport à un aimant ou un circuit inducteur. Sens du courant induit.<br><br>Loi de modulation de Lenz.<br><br>Force électromotrice induite, loi de Faraday. | <b>Décrire, mettre en œuvre et interpréter des expériences illustrant les lois de Lenz et de Faraday.</b><br><br>Utiliser la loi de Lenz pour prédire ou interpréter les phénomènes physiques observés.<br><br>Utiliser la loi de Faraday en précisant les conventions d'algèbrisation. |

Le **bloc 4. « Circuit fixe dans un champ magnétique qui dépend du temps »** aborde le phénomène d'auto-induction puis le couplage par mutuelle inductance entre deux circuits fixes. Elle traite du modèle du transformateur de tensions.

| Notions et contenus  | Capacités exigibles   |
|--|---|
| <p><b>4. Circuit fixe dans un champ magnétique qui dépend du temps</b></p>                       |   |
| <p><u>Auto-induction.</u></p> <p>Flux propre et inductance propre.</p> <p>Étude énergétique.</p> | <p>Différencier le flux propre des flux extérieurs.</p> <p>Utiliser la loi de modération de Lenz.</p> <p>Évaluer et connaître l'ordre de grandeur de l'inductance propre d'une bobine de grande longueur, le champ magnétique créé par une bobine infinie étant donné.</p> <p><b>Mesurer la valeur de l'inductance propre d'une bobine.</b></p> <p>Conduire un bilan de puissance et d'énergie dans un système siège d'un phénomène d'auto-induction en s'appuyant sur un schéma électrique équivalent.</p> |
| <p><u>Cas de deux bobines en interaction.</u></p> <p>Inductance mutuelle entre deux bobines.</p> | <p>Déterminer l'inductance mutuelle entre deux bobines de même axe de grande longueur en « influence totale », le champ magnétique créé par une bobine infinie étant donné.</p>   |

|   |   |
|---|---|
| <p>Circuits électriques à une maille couplés par le phénomène de mutuelle induction en régime sinusoïdal forcé.</p> | <p>Connaître des applications dans le domaine de l'industrie ou de la vie courante.</p> <p>Établir le système d'équations en régime sinusoïdal forcé en s'appuyant sur des schémas électriques équivalents.</p> |
|---|---|

Le bloc 5. « Circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire » est centré sur la conversion de puissance. Des situations géométriques simples permettent de dégager les paramètres physiques pertinents afin de modéliser le principe d'un moteur à courant continu ou un dispositif de freinage, puis par adjonction d'une force de rappel un haut-parleur électrodynamique.

| Notions et contenus  | Capacités exigibles  |
|--|--|
| <p><b>5. Circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire</b></p> <p><u>Conversion de puissance mécanique en puissance électrique.</u></p> <p>Rail de Laplace. Spire rectangulaire soumise à un champ magnétique extérieur uniforme et en rotation uniforme autour d'un axe fixe orthogonal au champ magnétique.</p> <p>Freinage par induction</p> | <p>Interpréter qualitativement les phénomènes observés.</p> <p>Écrire les équations électrique et mécanique en précisant les conventions de signe.</p> <p>Effectuer un bilan énergétique.</p> <p>Connaître des applications dans le domaine de l'industrie ou de la vie courante.</p> <p>Expliquer l'origine des courants de Foucault et en connaître des exemples d'utilisation.</p> <p><b>Mettre en évidence qualitativement les courants de Foucault.</b></p> |
| <p><u>Conversion de puissance électrique en puissance mécanique</u></p> <p>Moteur à courant continu à entrefer plan.</p> <p>Haut-parleur électrodynamique.</p>   | <p>Analyser le fonctionnement du moteur à courant continu à entrefer plan en s'appuyant sur la configuration des rails de Laplace.</p> <p>Citer des exemples d'utilisation du moteur à courant continu.</p> <p>Expliquer le principe de fonctionnement d'un haut-parleur électrodynamique dans la configuration simplifiée des rails de Laplace.</p> <p>Effectuer un bilan énergétique.</p>  |