Electromagnétisme Chap.1
Conservation de la charge – Conducteurs ohmiques

Intro :

Ce chapitre traite du transport de charge électrique. Il précise certains concepts introduits lors de l'étude des circuits électriques en 1ère année. Contrairement à l'étude des circuits électriques, effectuée en assimilant les fils à des lignes, on modélise ici ***le transport de charge en 3D*** : les fils ont une section non-nulle.

La première partie de ce chapitre est analogue à tous les chapitres traitant d'un phénomène de transport. On y verra la notion de ***débit de charge***, de ***vecteur densité de courant*** associé, ***l'équation locale de conservation de la charge*** et la démonstration de la ***loi des nœuds*** en régime stationnaire.

La deuxième partie traite du transport du courant électrique dans les conducteurs ohmiques, modèle bien adapté à la conduction électrique dans les métaux. On donnera la ***loi d'Ohm locale*** ainsi qu'un ***modèle microscopique de la conduction***, l'expression de la *résistance* en fonction des dimensions du conducteur, pour finir avec l'expression mésoscopique de ***l'effet Joule***.

1. Débit, conservation, loi des nœuds

1.1. L'intensité du courant est un débit de charge à travers une surface

- ❖ Donner l'expression mathématique de cette définition. Donner les unités de chacun des termes
- ❖ Comme tout débit, l'intensité est algébrique. Quelle est la signification physique de son signe ?
- ❖ Dans cette modélisation 3D, quelle grandeur orientée joue le rôle de la flèche qui donnait en 1D le sens conventionnel du courant dans une branche (étude circuits électriques) ?

Il n'est pas nécessaire de connaître la nature des porteurs de charge et encore moins leur sens de déplacement pour définir le courant électrique. Le sens du courant :

- ne représente pas le sens de déplacement des porteurs de charges (sans unité)
- mais le sens du déplacement de la grandeur « charge électrique » (coulombs)

ces deux sens n'ont aucune raison d'être identiques.

Ne pas confondre transport de charge *et* ***transport de porteurs*** *de charge !!*

1.2. Vecteur intensité surfacique (ou vecteur densité de courant)

❖ Donner la définition du vecteur densité de courant à partir de l'intensité électrique
❖ Quelles informations physiques contient ce vecteur ?

Remarque de vocabulaire : Le vecteur « intensité surfacique » est parfois qualifié de vecteur densité *volumique* de courant. Ne pas se laisser piéger par cette appellation : cette intensité surfacique est bien en $A.m^{-2}$. Le qualificatif « volumique » fait référence à la modélisation 3D du transport de charge, par opposition aux deux autres modélisations possibles : surfacique 2D et linéique 1D (cette dernière est utilisée en élec 1ère année).

Contrairement au cas du transport de masse par un fluide, il faut ici distinguer deux types de charges électriques : la ***charge mobile*** et la ***charge immobile***. Dans un conducteur solide (fil de cuivre par exemple), chaque atome du cristal *libère* en moyenne un électron (environ). Cet « électron libre » porteur d'une charge électrique $(-e)$ est, comme son nom l'indique, libre de se déplacer dans le fil. L'atome ayant libéré cet électron est devenu un *cation* porteur d'une charge électrique $(+e)$, et reste immobile : c'est lui qui constitue le fil à l'intérieur duquel se déplacent les électrons libres.

Porteurs de charge ***mobile*** *ou* ***fixes***

Dans un conducteur électrique solide, les ***ions du réseau cristallin sont fixes*** *et ne participent pas au courant. Ce sont les* ***porteurs libres qui « s'écoulent »*** *et qui sont responsables du courant électrique.*

Dans un milieu globalement ***neutre*** *:*

$$\boldsymbol{\rho = \rho_{fixes} + \rho_{mobiles} = 0}$$

Il existe plusieurs types de porteurs mobiles dans les conducteurs ordinaires :

- les électrons : dans les métaux
- les « trous » dans les semi-conducteurs
- les anions et cations dans les solutions électrolytiques

❖ Par analogie avec le transport de masse par un fluide, donner la relation entre le vecteur densité de courant et la vitesse moyenne de déplacement des électrons libres (appelée aussi ***vitesse de dérive***)

❖ Exprimer la charge volumique $\rho(M,t)$ en fonction de la densité volumique de porteurs $n(M,t)$ et de la charge q de chaque porteur.
❖ Que devient cette expression s'il existe plusieurs types de porteurs, chacun étant de densité $n_i(M,t)$ et et de charge q_i ?
❖ En déduire l'expression du courant surfacique en fonction des densités volumiques de porteurs, de leur charge respective et de leur vitesse de dérive respective

1.3. Equations locale et intégrale de conservation de la charge

❖ Donner l'équation intégrale de la charge en vous appuyant sur un schéma pour définir les termes
❖ Donner l'équation locale de conservation de la charge (sous-entendue « mobile »)
❖ Ces deux écritures concernent-elle un système macro/méso/microscopique ?
❖ Sans faire tout le calcul, et en considérant un transport unidimensionnel rectiligne, donner les étapes permettant de démontrer l'équation locale à partir de l'équation intégrale
❖ Comment faire la démonstration dans le cas général 3D ?

1.4. Loi des nœuds : conservation du débit en régime stationnaire

Définition d'une ligne de courant

Définie à un instant t donné, c'est la courbe ***tangente*** *en chacun de ses points au* ***vecteur densité de courant****.*
Elle est ***orientée*** *dans le sens de $\vec{j}$.*

Définition d'un tube de courant

L'ensemble *des lignes de courant* ***s'appuyant sur un contour fermé*** *forme une surface nommée* ***tube de courant****.*

Propriété en régime stationnaire : loi des noeuds
(équation intégrale, puis locale)

Soient deux sections quelconques S_1 (située en x_1) et S_2 (en x_2) d'un fil cylindrique :
$$\boldsymbol{I(x_1) = I(x_2)}$$

L'écriture équivalente, mais locale (i.e. écrite en un point) :
$$\boldsymbol{div(\vec{j}) = 0}$$

C'est ***la loi des nœuds*** *pour le transport de charge !*
On dit aussi que ***$\vec{j}$ est à flux conservatif*** *: son flux est le* ***même en toute section*** *d'une conduite.*

2. Transport de charge dans un conducteur ohmique

On décrit maintenant la conduction électrique à l'échelle mésoscopique, dans les milieux vérifiant la loi d'Ohm. On prendra comme exemple concret le cuivre (un métal), mais la plupart des notions sont valables pour les solutions électrolytiques diluées.

2.1. Electrons de conduction d'un métal

Dans un métal, chaque atome libère environ un électron, libre alors de se déplacer à l'intérieur du métal. On rappelle que le métal est globalement neutre : il y a autant de cations que d'électrons libres.

Les électrons libres peuvent être assimilés à un gaz parfait monoatomique : en l'absence de champ électrique extérieur appliqué, ils ont un mouvement désordonné d'agitation thermique, de moyenne nulle (moyenne statistique sur un grand nombre d'électrons). La vitesse quadratique est de l'ordre de $10^5\ m.s^{-1}$.

Lorsqu'un champ électrique existe à l'intérieur du métal, à ce mouvement désordonné d'agitation thermique se superpose un *mouvement d'ensemble* des électrons libres. La vitesse d'ensemble correspond à la vitesse moyenne (moyenne statistique sur un grand nombre d'électrons) qui est alors non nulle. Elle est de **qq $\boldsymbol{mm.s^{-1}}$** !! On parle aussi de ***vitesse de dérive***.

La relation entre le vecteur densité de courant $\vec{j}(M,t)$ et la vitesse moyenne $\vec{v}(M,t)$ est souvent exprimée en fonction de la *densité de porteurs de charges mobiles* $n(M,t)$ et de la charge q de chaque porteur (unités respectives : m^{-3} et C).

- Ecrire à nouveau cette relation (dans le cas d'un unique type de porteurs)
- Sachant que la masse volumique du cuivre est $\rho = 8900\ kg.m^{-3}$, et que sa masse molaire est de $M = 63{,}6\ g.mol^{-1}$, évaluer le nombre d'électrons libres par unité de volume du métal
- En déduire un ordre de grandeur de la charge volumique mobile ρ_{mob} dans le cuivre.
- En déduire un ordre de grandeur de la vitesse de dérive

Dans certains conducteurs, il existe plusieurs types de porteurs de charge :
  - différents ions dans une solution électrolytique
  - électrons et trous dans les semi-conducteurs

- Redonner l'expression du vecteur densité de courant en fonction des caractéristiques des différents porteurs

2.2. Loi d'Ohm locale

C'est l'écriture de la loi d'Ohm à l'échelle mésoscopique :

- à I correspond $\vec{j}$ (cf. début du chapitre)
- à U correspond le champ électrique $\vec{E}$ (on admet pour le moment ce lien, sera vu en électromagnétisme)

> ***Loi d'Ohm locale***
>
> *Dans un conducteur ohmique, le* ***courant surfacique est colinéaire de même sens au champ électrique*** *:*
>
> $$\vec{j} = \gamma \vec{E}$$
>
> *Cette* ***relation de proportionnalité*** *définit la* ***conductivité*** *du métal :* $\gamma > 0$

Remarques *:*

- La conductivité s'exprime en $S.m^{-1}$.
- Ordre de grandeur $\boldsymbol{\gamma_{Cu} = 6\ 10^{7}\ S.m^{-1}}$
- On définit *la résistivité du métal* ρ (en $\Omega.m$) comme l'inverse de la conductivité (à ne pas confondre avec la charge volumique) : $\rho \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\gamma}$

2.3. Modèle de Drude : modèle microscopique de la conduction électrique

L'expérience montre que certains conducteurs vérifient la loi d'Ohm : lorsqu'une tension U est appliquée aux extrémités du fil, le courant électrique I qui apparaît est proportionnel à la tension. Ces conducteurs sont dits *ohmiques*. A l'échelle mésoscopique, cela équivaut à la loi d'Ohm locale.

Le modèle de Drude (1900) est une tentative d'explication théorique de la loi d'Ohm locale, à l'échelle ***microscopique*** à l'aide de la ***mécanique newtonienne***. C'est un modèle de physique statistique : on étudie le mouvement *moyen* des porteurs, ce qui permet de relier l'échelle micro à l'échelle méso. Nous donnerons les ingrédients physiques du modèle statistique, mais ne le détaillerons pas. En effet, on peut montrer que les collisions des électrons sur les cations du réseau (responsables de la résistance électrique) peuvent être assimilées à une force de frottement fluide équivalente. C'est ce formalisme simplifié que nous utiliserons. On pourra trouver la version statistique (ne regarder que celle en régime continu) sur la page wikipedia : http://fr.wikipedia.org/wiki/Modèle_de_Drude

Idée clef du modèle :

- la tension appliquée génère un champ électrique (considéré uniforme) au sein du métal
- ce champ électrique accélère les électrons de conduction colinéairement à lui-même (cf. PCSI)
- cette accélération est compensée par les chocs des électrons avec les cations du réseau cristallin
- dans le modèle de Drude, ce sont les cations qui génèrent cette « résistance » au passage du courant

Ingrédients du modèle statistique :

- les cations du réseau sont fixes
- les électrons mobiles n'interagissent pas à distance entre eux, ni avec les cations (Gaz Parfait)
- un choc entre un électron mobile et un cation est considéré de durée nulle : il est instantané
- la vitesse de l'électron après la collision est totalement décorrélée de sa valeur avant le choc
- la vitesse après le choc est aléatoire, la moyenne de cette vitesse est nulle
- entre deux chocs, l'électron est soumis à la force électrique (champ électrique associé à la tension U)
- la durée moyenne entre deux chocs est notée τ et caractérise le matériau

Modèle simplifié : effet des cations = force de frottements fluide

On applique une tension U au métal à l'instant $t = 0$. On admet (temporairement dans ce cours) qu'un champ électrique uniforme $\vec{E}$, associé à U, apparaît dans le métal.

> *Dans un conducteur ohmique, les interactions entre les électrons libres et le réseau de cations peuvent être modélisées par* ***une force de frottements fluide****.*

- En appliquant la RFD à un électron, et en notant $-\frac{m}{\tau}\vec{v}$ la force de frottement fluide, établir l'expression de la vitesse de l'électron en fonction du temps.
- Quelle est la vitesse de l'électron en régime permanent ? A exprimer en fonction de τ.

On note que le vecteur vitesse de l'électron est colinéaire au champ électrique. En « oubliant » l'existence de l'agitation thermique (cohérent avec notre choix de ne pas utiliser de modèle statistique), tous les électrons atteignent la même vitesse en régime permanent.

- En déduire la loi d'ohm locale
- D'après la conductivité du cuivre, estimer un ordre de grandeur de τ.

2.4. <u>Critique du modèle de Drude : libre parcours moyen des électrons</u>

L'idée essentielle du modèle de Drude est d'expliquer l'origine de la résistance électrique par les chocs des électrons de conduction sur les cations fixes du réseau. Une conséquence évidente du modèle est que le « libre parcours moyen » des électrons (la distance moyenne parcourue entre deux chocs) doit être de l'ordre de grandeur de la distance entre deux cations : soit environ 1 $angström$ ($0{,}1\ nm$).

La mesure de la conductivité du cuivre nous a permis d'en déduire la valeur du temps τ. Le modèle statistique complet (cf. wikipedia) montre que ce temps τ s'identifie avec la *durée moyenne entre deux collisions*. Cela nous permet ici d'évaluer l'ordre de grandeur du libre parcours moyen, et de le comparer à la prévision du modèle de Drude *à température ambiante*.

- En assimilant les électrons à un GParfait monoatomique, estimer leur vitesse quadratique moyenne
- En déduire le libre parcours moyen des électrons dans le réseau de cations
- Conclure (valeur conductivité du cuivre donnée à température ambiante)

Le succès de ce modèle vient du fait qu'il permet de décrire de manière satisfaisante certains phénomènes :
  - l'effet Hall : effet d'un champ magnétique stationnaire et uniforme
  - la propagation des ondes électromagnétiques dans les métaux

Le modèle convenable est quantique, et l'origine physique de la résistance électrique provient :
  - des défauts du réseau cristallin (lacunes, impuretés, dislocations)
  - des collisions des électrons avec les « phonons » (particules fictives associées aux modes de vibration du réseau cristallin) : il y donc bien une composante de la résistance due aux collisions des électrons avec le réseau, même si cette description doit être quantique

2.5. <u>Domaine de validité de la loi d'Ohm locale</u>

La démonstration que nous avons faite – modèle de Drude simplifié, tension U constante – montre que la loi d'Ohm locale n'est vérifiée que pour des temps $t \gg 10^{-14}\ s$.

Dans un métal, le temps caractéristique de l'établissement du régime permanent est de l'ordre de $\boldsymbol{\tau \sim 10^{-14} s}$.

Tant que l'excitation (ici la tension U appliquée au conducteur, associée au champ électrique) varie avec une fréquence très inférieure à $1/\tau$, on peut alors considérer que la loi d'ohm est valable dans un conducteur ohmique. A plus haute fréquence, le régime transitoire n'a pas le temps de s'atténuer. ***Dans ce cas, même un conducteur ohmique ne vérifie pas la loi d'ohm***.

<u>Généralisation de la loi d'Ohm au cas des régimes variables</u>

La loi d'ohm locale établie en régime continu se généralise au cas des **régimes lentement variables** *tant que la période T des variations du champ électrique (régime harmonique) est telle que :*

$$\boldsymbol{f \ll 10^{14}\ Hz}$$

Pour des champs plus rapidement variables, on peut introduire une conductivité complexe, ce qui signifie simplement que le courant n'a plus le temps de s'aligner sur le champ électrique (temps de réponse trop grand). A très haute fréquence, le courant tend même vers zéro, le conducteur apparaissant donc comme un filtre passe-bas (entrée = champ électrique, sortie = courant).

2.6. Résistance électrique en fonction des dimensions d'un conducteur filiforme

On considère un tronçon de conducteur rectiligne, de section S et de longueur L. Le champ électrique est dirigé le long du conducteur (selon $\overrightarrow{u_x}$), et on le suppose uniforme. Le courant volumique $\vec{j}$ est aussi uniforme. La face d'entrée est portée au potentiel V_A, celle de sortie au potentiel V_B. On se place en régime permanent.

- ❖ Donner les relations entre :
    - champ électrique $\|\vec{E}\|$ et tension $(V_A - V_B)$ (si vue en 1ère année, sinon admise)
    - l'intensité I et la densité volumique de courant $\vec{j}$
- ❖ En déduire l'expression de la résistance du conducteur en fonction de sa conductivité et de ses dimensions

Remarque : C'est le raisonnement tenu dans ce paragraphe qui fait le lien entre l'échelle macro et l'échelle méso, sans invoquer l'échelle microscopique. Sous les hypothèses simplificatrices faites, et à partir de la loi d'ohm usuelle (intégrale) issue de l'expérience, ce raisonnement démontre l'existence de la loi d'ohm locale (admise lorsque présentée dans ce cours). Au paragraphe 2.2. nous n'avons pas amené la loi d'ohm locale à partir de la loi d'ohm intégrale pour de simples raisons pédagogiques.
L'intérêt du modèle de Drude est alors d'expliquer (via la mécanique de Newton) la colinéarité de $\vec{j}$ et de $\vec{E}$. Ce n'est alors plus une simple hypothèse simplificatrice, comme faite dans ce paragraphe, mais bien une propriété générale du transport de charge (dans les milieux homogènes, et tant que $f \ll 10^{14}\ Hz$).

3. Puissance volumique reçue par les porteurs – Effet Joule

3.1. Puissance volumique reçue par les porteurs – Equivalent local de « $P = UI$ »

Définition de la puissance volumique reçue *par les porteurs de charge*

$$\delta P_{reçue} \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{p_v}\, d\tau$$

Pour passer de l'échelle mésoscopique à l'échelle macroscopique, il suffit d'intégrer :

$$\boldsymbol{P_{reçue\ par\ V}} = \iiint_{\boldsymbol{volume\ V}} \boldsymbol{p_v\, d\tau}$$

Expression de la puissance volumique reçue

La puissance volumique $\boldsymbol{p_v}$ ***reçue par les porteurs*** *de charge et* ***fournie par le champ*** *électrique s'écrit :*

$$\boldsymbol{p_v = \vec{j} \cdot \vec{E}}$$

Discussion autour de cette expression :

- ❖ Préciser les unités de chaque terme, et vérifier l'homogénéité de cette expression
- ✪ A l'aide du même modèle qu'au 2.6., montrer qu'on peut déduire cette expression de « $P = UI$ »
- ❖ Dans le cas d'un conducteur ohmique, donner les deux expressions de p_v en fonction de la conductivité
- ❖ A quelles formules connues ces trois écritures vous font elles penser ?

3.2. Puissance volumique dissipée par effet Joule

Puissance volumique dissipée par effet Joule

Lorsque les porteurs se déplacent dans un ***milieu support*** *(fil de cuivre, solution électrolytique), ils subissent des* ***interactions*** *avec les éléments du milieu (cations, molécules du solvant).*

Ces interactions peuvent être assimilées à un « ***frottement*** *» qui*
convertit intégralement la puissance reçue par les porteurs en énergie thermique du milieu : c'est l'effet Joule.

Remarques : Il est rare que cette distinction soit faite dans les énoncés de concours, car il est rare de rencontrer des situations où la puissance reçue par les porteurs n'est pas intégralement transférée au milieu conducteur (exception : particules chargées dans le tube à vide d'un accélérateur de particules, exemple

4. Remarques conceptuelles

4.1. On pourrait déduire la loi d'ohm locale de "$U = RI$"

Contrairement au cheminement suivi dans ce chapitre, compte-tenu de votre cursus scolaire, on devrait établir la loi d'ohm locale (que vous ne connaissiez pas) à partir de la loi d'ohm intégrale (que vous connaissiez). Il suffit de considérer une tranche mésoscopique de conducteur, d'écrire la loi d'ohm intégrale, et d'en déduire la loi d'ohm locale. Pour des raisons pédagogiques, on a plutôt procédé comme en diffusion thermique.

4.2. Interprétation microscopique de "$U = RI$" à l'aide du modèle de Drude

Il faut bien distinguer le lien macro/méso du lien macro/micro.

Le premier a été discuté ci-dessus et permet de relier une loi intégrale à une loi locale, ce que nous avons souvent fait en diffusion et en mécanique des fluides. Il suffit de modéliser les grandeurs physiques comme étant continûment réparties dans l'espace pour écrire ce lien. Il n'y a rien de très puissant là-dedans.

Le second permet d'unifier deux domaines de la physique, jusqu'à présent disjoints : l'élec et la méca du point. Il n'existe qu'une seule réalité, et puisque les particules chargées microscopiques existent et qu'elles sont en mouvement, il est certain qu'on peut réduire les lois macroscopiques de l'élec à des lois mécaniques appliquées à l'échelle microscopiques. En matière de connaissance, c'est une opération intellectuelle très satisfaisante, car unificatrice.

4.3. Interprétation microscopique de "$P = UI$" à l'aide du modèle de Drude

Ce n'est pas explicitement au programme, mais il est intéressant de relier deux définitions de la puissance, jusqu'alors totalement disjointes : $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$ de la méca du point et $P = UI$ de l'élec.

On rappelle les hypothèses simplificatrices du modèle microscopique de Drude simplifié que l'on a utilisé :
- un seul type de porteurs, de densité notée $n(M, t)$
- on ne calcule pas de moyenne statistique, ce qui nécessite « d'oublier » l'agitation thermique
- la vitesse d'un porteur s'identifie alors à la vitesse moyenne des porteurs (la vitesse de dérive)

✪ Donner l'expression de la puissance reçue par un porteur de charge mobile en fonction de $\vec{E}$ et de la vitesse
✪ En considérant tous les porteurs de charge mobiles contenus dans un volume élémentaire du conducteur, en déduire l'expression de la puissance reçue par ces porteurs
✪ Faire apparaître le vecteur densité de courant, et conclure
✪ Montrer qu'en régime permanent, toute la puissance fournie aux porteurs est perdue via la force de frottement fluide, modélisant l'interaction des porteurs avec le réseau de cations

5. Analogies conduction électrique / conduction thermique

NB : Dans le cours d'électromagnétisme (à venir), nous définirons le potentiel électrique (V en volts) à partir du champ électrique par $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V)$

❖ Donner les analogues thermiques des grandeurs/expression électriques suivantes (préciser les unités) :
  - ▫ intensité électrique, tension électrique, lois de Kirchhoff (domaine de validité)
  - ▫ conductivité électrique, loi d'ohm intégrale, loi d'ohm locale, domaine de validité
  - ▫ expression de R pour un conducteur rectiligne, puissance volumique dissipée par effet Joule
  - ▫ vitesse de dérive, charge volumique positive des cations du réseau, modèle de Drude

La partie « **Sources du champ électromagnétique** » étudie les sources du champ électromagnétique dans l'approximation des milieux continus. Par ailleurs, il convient de souligner et d'exploiter les analogies formelles avec les autres théories de champs : diffusion de particules, diffusion thermique, gravitation, mécanique des fluides.

Notions et contenus	Capacités exigibles
5.1. Sources du champ électromagnétique	
5.1.1. Description microscopique et mésoscopique des sources	
Densité volumique de charges. Charge traversant un élément de surface fixe et vecteur densité de courant. Intensité du courant.	Exprimer la densité volumique de charge et le vecteur densité de courant en fonction de la vitesse moyenne des porteurs de charge, de leur charge et de leur densité volumique. Relier l'intensité du courant et le flux du vecteur densité de courant.
5.1.2 Conservation de la charge	
Équation locale de conservation de la charge.	Établir l'équation traduisant la conservation de la charge dans le seul cas d'un problème unidimensionnel en géométrie cartésienne. Citer et utiliser une généralisation admise en géométrie quelconque utilisant l'opérateur divergence, son expression étant fournie. Exploiter le caractère conservatif du vecteur densité de courant en régime stationnaire ; relier cette propriété à la loi des nœuds de l'électrocinétique.
5.1.3 Conduction électrique dans un conducteur ohmique	
Loi d'Ohm locale. Conductivité électrique.	Établir l'expression de la conductivité électrique à l'aide d'un modèle microscopique, l'action de l'agitation thermique et des défauts du réseau étant décrite par une force de frottement fluide linéaire. Discuter de l'influence de la fréquence sur la conductivité électrique. Établir l'expression de la résistance d'une portion de conducteur filiforme.
Effet Hall.	Interpréter qualitativement l'effet Hall dans une géométrie parallélépipédique.
Effet thermique du courant électrique : loi de Joule locale.	Exprimer la puissance volumique dissipée par effet Joule dans un conducteur ohmique.