Exercices – Ecoulement parfait : Bernoulli

Exercice 1 : Vase de Tantale, oscillateur de relaxation mécanique ✪

Extrait CCP PC 2012 : exemple d'oscillateur mécanique, sans basculement de pièces mécaniques

On notera ρ la masse volumique de l'eau, g l'accélération de la pesanteur : $\rho = 10^3$ kg.m^{-3} ; g = 9,8 m.s^{-2}.

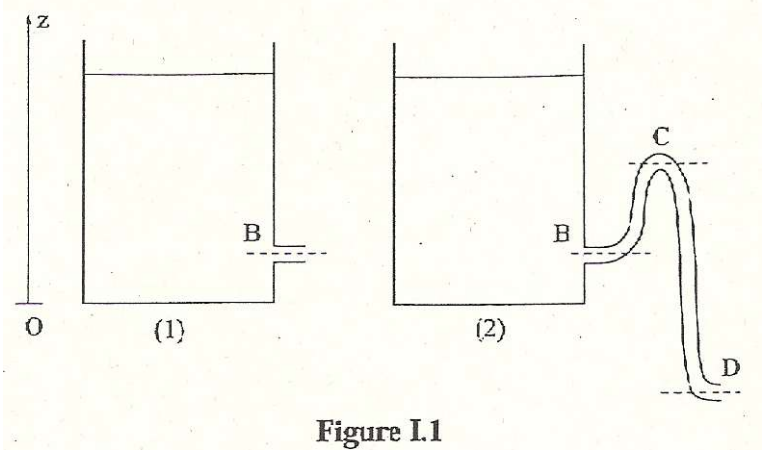


Figure I.1

Vidange d'un réservoir (figure de gauche)

On considère un réservoir cylindrique dont la section horizontale est un disque d'aire S. Ce réservoir est rempli d'eau jusqu'à une certaine hauteur h. Au niveau du point B, situé à la hauteur z_B, il est percé d'un orifice de section σ.

On nomme D_s le débit volumique d'eau sortant par l'orifice B. La surface libre du réservoir et l'extrémité de l'orifice sont en contact avec l'air, à la pression atmosphérique $P_0 = 1\ bar$. Tous les écoulements considérés sont assimilés à des écoulements non visqueux, homogènes, incompressibles et laminaires.

On assimile la vidange du réservoir à un écoulement stationnaire, en faisant l'hypothèse que la hauteur $h(t)$de la surface libre varie lentement par rapport aux vitesses caractéristiques de l'écoulement.

1. Tracer l'allure plausible des lignes de courant associées à l'écoulement.

2. Ecrire une relation entre la vitesse de la surface libre v_{libre}, la vitesse en B v_B, et les sections σ et S ?

3. Enoncer et appliquer le théorème de Bernoulli le long de l'une des lignes de courant dessinées, et déterminer, pour des sections σ et S quelconques, la vitesse du fluide v_B au niveau de l'orifice B.
Que vaut alors le débit D_S ?

4. Que vaut la vitesse v_B dans la limite où $\sigma \ll S$?
On conservera l'hypothèse $\sigma \ll S$ pour toute la suite du problème.

5. En appliquant une loi de conservation à un système bien choisi, établir une EDiff vérifiée par $h(t)$.

Influence du siphon (figure de droite)

Le siphon est la portion coudée de conduite, de section constante σ, dessinée sur la figure de droite. Sa hauteur maximale est représentée par le point C, et se trouve à une hauteur $z_C > z_B$.

Un siphon peut se trouver dans deux états :

- Dans l'état **amorcé**, le siphon ne contient que de l'eau (pas d'air), et l'on peut considérer que le théorème de Bernoulli s'applique d'un bout à l'autre du siphon. L'extrémité D située à son extrémité est alors en contact avec l'air à pression atmosphérique P_0
- Dans l'état **désamorcé**, le siphon contient de l'air (et éventuellement de l'eau). La continuité de l'écoulement dans le siphon est rompue, et le débit à travers la conduite est nul.

On supposera qu'une fois amorcé, le siphon reste dans cet état jusqu'à ce que de l'air pénètre par l'orifice situé en B. Le siphon est toujours amorcé lorsque le niveau de l'eau excède z_C.

6. Lorsque le siphon est amorcé, le réservoir se vide avec un débit constant D_S, que l'on exprimera en fonction de $h(t), g, \sigma$ et d'une des trois hauteurs z_B, z_C ou z_D.

7. Etablir une équation différentielle du premier ordre vérifiée par $h(t)$, la hauteur de la surface libre, quand le siphon est amorcé.

8. Trouver la solution de cette équation différentielle en partant de la condition initiale $h(t=0) = h_0 > z_C$
En déduire la durée t_1 nécessaire pour que le siphon se désamorce.

Réservoir alimenté (figure ci-dessous I.2)
Le réservoir est désormais alimenté en permanence par un filet d'eau de débit D_i arrivant par l'orifice A. Ce filet d'eau est un écoulement distinct de celui se produisant dans le réservoir et il ne le perturbe pas.

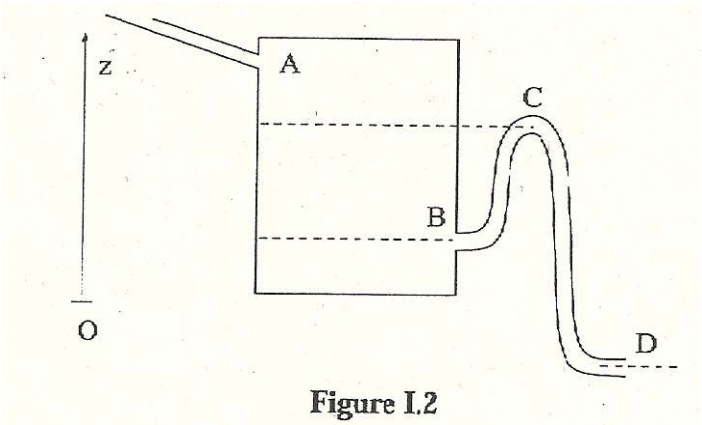


Figure I.2

9. Le siphon étant amorcée, comment doit-on modifier l'équation différentielle portant sur $h(t)$?

10. Montrer que l'équation différentielle obtenue admet une solution stationnaire de hauteur h_s constante, que l'on exprimera en fonction de z_D, D_i, σ et g.
Cette solution est-elle acceptable si $h_s < z_B$? Justifier.

11. Décrire l'évolution de la hauteur $h(t)$ lorsque le siphon est désamorcé.

12. Montrer que si le débit D_i est plus faible qu'une valeur critique D_c, le système représenté sur la fig I.2. se comporte comme un oscillateur : le débit de sortie est une fonction périodique du temps.
Déterminer la valeur de D_c.

13. On suppose$D_i < D_c$. Tracer l'allure temporelle da la hauteur $h(t)$ en fonction du temps t.