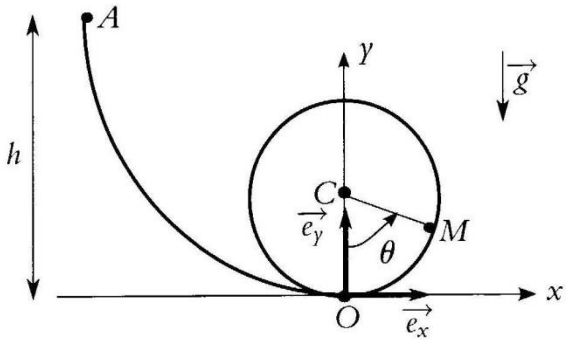
DM1 -- Mécanique du point matériel *(à rendre le 11/09)*

Exercice 1 : Bille dans une gouttière *(extrait ICNA 2006)*

Une bille assimilée à un point matériel M de masse m est lâchée sans vitesse initiale depuis le point A d'une gouttière situé à une hauteur h du point le plus bas O de la gouttière. Cette dernière est terminée en O par un guide circulaire de rayon a, disposé verticalement. La bille, dont on suppose que le mouvement est sans frottements, peut éventuellement quitter la gouttière à l'intérieur du cercle.

0. Donner les lois de Coulomb du frottement solide. Que peut-on dire de la réaction du support lorsqu'il n'y a pas de frottements ?



1. Montrer qu'au cours du mouvement l'énergie mécanique de la bille se conserve.

2. Déterminer (simplement) la norme v_0 de la vitesse en O en fonction des données du problème.

3. Exprimer la norme de la vitesse au cours du mouvement de la bille dans le guide circulaire, en fonction des coordonnées.

4. Exprimer la réaction normale du guide circulaire sur la bille au cours du mouvement, en fonction de m, g, a, $\dot{\theta}$ et θ.

5. En utilisant la conservation de l'énergie mécanique, exprimer la réaction du guide en fonction de m, g, h, a et θ.

6. En imaginant concrètement l'expérience, donner les trois types de mouvement que l'on peut avoir lorsque l'on fait varier la hauteur du point A. Quels sont les critères physiques (à exprimer mathématiquement) qui permettent de distinguer ces trois types de mouvement ?

7. Déterminer la hauteur minimale du point A pour que la bille ait un mouvement révolutif dans le guide.

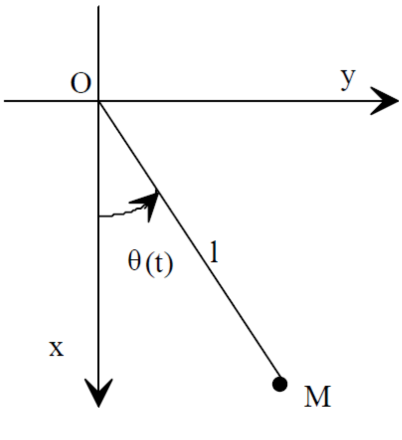
8. L'intuition laisserait penser qu'une hauteur du point A supérieure au diamètre du guide circulaire soit suffisante pour que la bille effectue un looping. A quelle condition cette intuition fait-elle en réalité référence ?

Problème 2 : Oscillations du pendule *(extrait petites Mines 1996)*

I Un pendule simple non amorti :

On considère un point matériel M de masse m accroché à un point fixe O par l'intermédiaire d'un fil inextensible de longueur l et de masse nulle. L'ensemble est situé dans le champ de pesanteur. On néglige les frottements. On lâche la masse d'un angle θ_o sans vitesse initiale.

1-1 Etude dans le cas de petites oscillations: $\sin(\theta) \approx \theta$:



1-1-1 A l'aide du PFD :
- Montrer que le mouvement est contenue dans le plan orthogonal à laxe (Oz).
- Etablir l'équation différentielle du second ordre, vérifiée par θ.

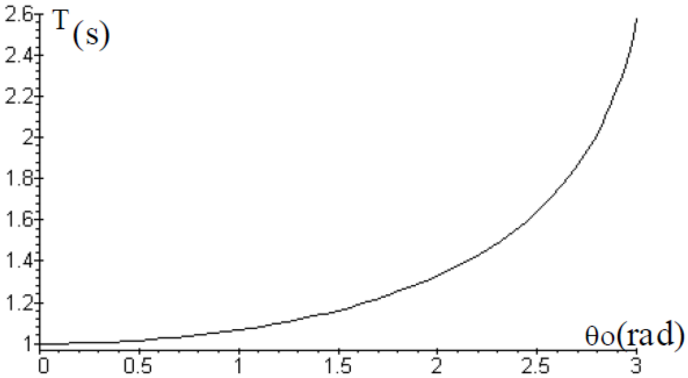
1-1-2 Répondre à nouveau à ces deux questions, mais en utilisant le Théorème du moment cinétique.

1-1-3 En supposant que les élongations angulaires sont faibles, montrer que l'équation du mouvement est approchée par celle d'un oscillateur harmonique de pulsation ω_0 dont on donnera l'expression en fonction de l et g. En déduire θ(t).
On rappelle que pour les faibles élongations angulaires, $\sin(\theta) \approx \theta$.

1-2 Etude aux grands angles : $\sin(\theta) \neq \theta$:

1-2-1 Exprimer l'énergie potentielle de pesanteur en fonction de x puis de θ.
1-2-2 Montrer que l'énergie mécanique se conserve au cours du mouvement. Déterminer cette constante.
1-2-3 En déduire l'équation différentielle du premier ordre reliant $\dot{\theta}^2$, θ et θ_0 et les paramètres caractéristiques du système. On garde les mêmes conditions initiales.

Aux grands angles, la période d'oscillation dépend de l'amplitude. On peut calculer numériquement par ordinateur la dépendance de la période avec l'amplitude.
Remarque : l'amplitude est égale à l'angle initial θ_0 donné au pendule, la vitesse initiale étant nulle.



1-2-4 Commenter la courbe obtenue.

1-2-5 Proposer une méthode pour déterminer expérimentalement les valeurs de T.

II Oscillateur amorti :

Lorsque l'on enregistre expérimentalement θ(t), on constate que l'amplitude de θ diminue lentement. On interprète ce résultat par la présence de frottements que l'on modélise par :

$$\vec{f} = -\alpha\vec{v}$$

où $\vec{v}$ désigne la vitesse du point M et α une constante positive.

2-1 Etablir l'équation différentielle du second ordre vérifiée par θ.
En se limitant aux petits angles, écrire l'équation sous la forme :

$$\ddot{\theta} + \frac{2}{\tau}\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$$

2-2 A quelle condition obtient-on un régime pseudo-périodique ?

2-3 Donner l'expression mathématique de $\theta(t)$ dans ce régime, en faisant apparaître la pseudo-pulsation ω et en l'exprimant en fonction des paramètres de l'énoncé. Quelle est alors l'expression de la pseudo-période ?
On ne cherche pas à déterminer les constantes d'intégration.

2-4 Pourquoi peut-on dire que τ est le temps caractéristique des oscillations amorties ?

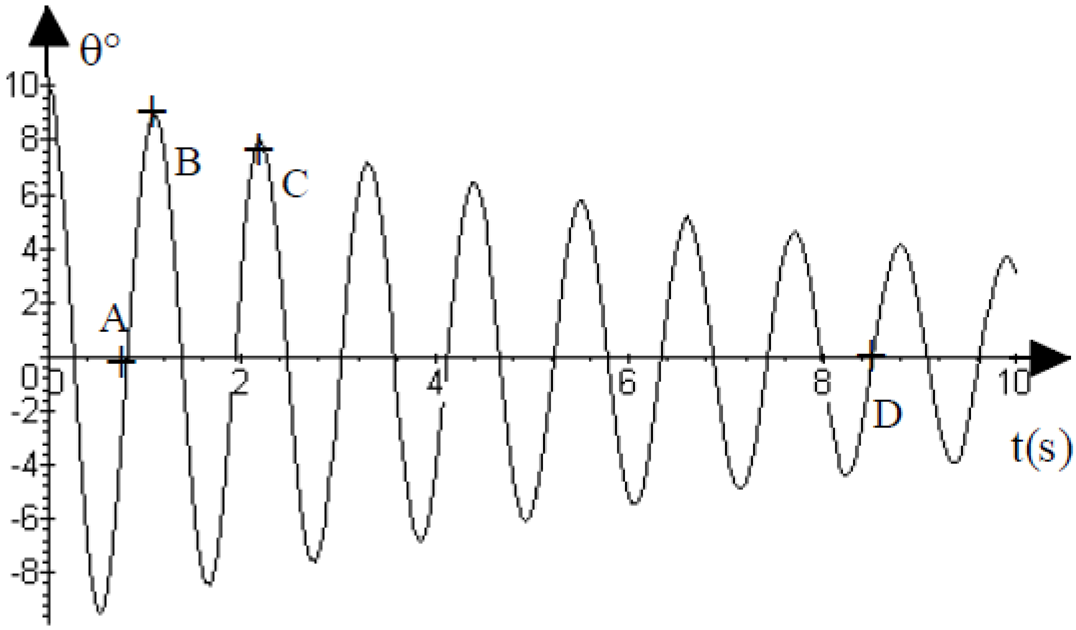
On appelle décrément logarithmique la quantité :

$$\delta = \ln\left(\frac{\theta(t)}{\theta(t+T)}\right)$$

où T est la pseudo-période et t le temps. Exprimer δ en fonction de T et τ.

2-5 La figure ci dessous représente les variations de θ avec le temps. On précise les coordonnées de 4 points particuliers:

Points	A	B	C	D
t (s)	0,53	1,1	2,2	8,25
θ(°)	0	8,95	8,02	0



La masse est m = 470 g.
Calculer numériquement à partir des valeurs expérimentales :
a) le décrément logarithmique δ;
b) la pseudo-période T;
c) le temps τ;
d) la constante α.

Fin de l'énoncé