Exercices – Ondes sonores dans les fluides

Exercice 1 : Equation de propagation (MPonts PSI 2013)
Etablissement de l'équation d'onde en considérant explicitement une particule de fluide
Manipulation du « champ de déplacement », non traité en cours (pas explicitement au programme)

❖ On trouvera quelques indices en fin d'énoncé

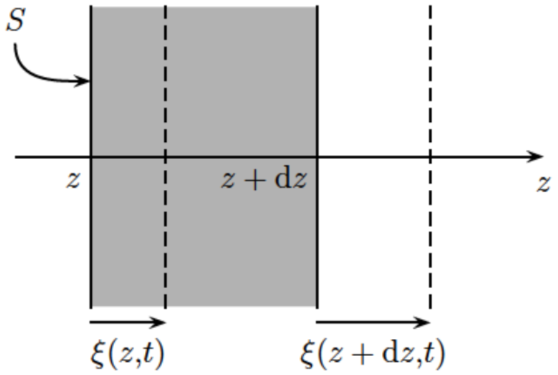


FIGURE 1 – Déformation du milieu lors du passage d'une onde sonore se propageant selon $\widehat{e}_z$.

On considère un milieu compressible et homogène caractérisé, au repos, par sa masse volumique ϱ_0 uniforme, et au sein duquel règnent une température T_0 et une pression P_0 uniformes (pesanteur négligée). Pour décrire la déformation du milieu, on considère une tranche (système fermé) de section S et d'épaisseur $\mathrm{d}z$ initialement au repos. Sous l'effet d'une perturbation se propageant dans la direction z, la tranche élémentaire, repérée au repos par l'abscisse z, est déplacée d'une distance $\xi(z,t)$ à un instant t (voir figure 1). La grandeur ξ est appelée champ de déplacement acoustique. On note $P(z,t)$ et $\varrho(z,t)$ respectivement la pression et la masse volumique de cette tranche élémentaire à un instant t quelconque. On définit enfin par $\vec{v}(z,t) = \dfrac{\partial \xi}{\partial t}\widehat{e}_z$ la vitesse de cette tranche.

❑ **1** — Déterminer, par conservation de la masse, la relation liant $\varrho(z,t)$ à ϱ_0 et $\dfrac{\partial \xi}{\partial z}$.

❑ **2** — En appliquant la relation fondamentale de la dynamique à la tranche de fluide initialement au repos entre les abscisses z et $z + dz$, établir la relation liant ϱ_0, $\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ et $\dfrac{\partial P}{\partial z}$.

❑ **3** — En déduire que $\xi(z,t)$ vérifie l'équation différentielle suivante, où $\chi_s = \dfrac{1}{\varrho}\left.\dfrac{\partial \varrho}{\partial P}\right|_S$ est le coefficient de compressibilité isentropique du milieu :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{1}{\chi_s \varrho_0}\,\frac{\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}}{\left(1 + \dfrac{\partial \xi}{\partial z}\right)}.$$

❑ **4 –** Dans le cadre de l'approximation acoustique $\frac{\partial \xi}{\partial z} \ll 1$. Quel est le nom de l'équation obtenue ?

❖ Indice question 1 : Exprimer la masse en l'absence d'onde, puis en présence d'onde

❖ Indice question 2 : prendre l'expression la plus simple pour la masse

❖ Indice question 3 : Après avoir expliqué avec des mots ce que représente le coefficient χ_S, notamment en précisant pourquoi P et ϱ varient – et autour de quelles valeurs elles varient, exprimer $\varrho(z,t)$ et fonction de $P(z,t)$. Dériver alors par rapport à z. Finir les calculs pour répondre à la question.

Exercice 2 : Tuyau d’orgue (CCP)
Application directe du complément de cours sur la propagation en tuyau (à faire seul)

Un tuyau d’orgue est assimilable à un tuyau de longueur l = 1,00 m fermé à une extrémité et ouvert à l’autre.
Les pression, température et masse volumique moyenne de l’air ($\gamma = 1{,}4$) contenu dans le tuyau sont : $P_0 = 1{,}013.10^5$ Pa ; $T_0 = 290$ K ; $\rho_0 = 1{,}22$ kg.m^{-3}

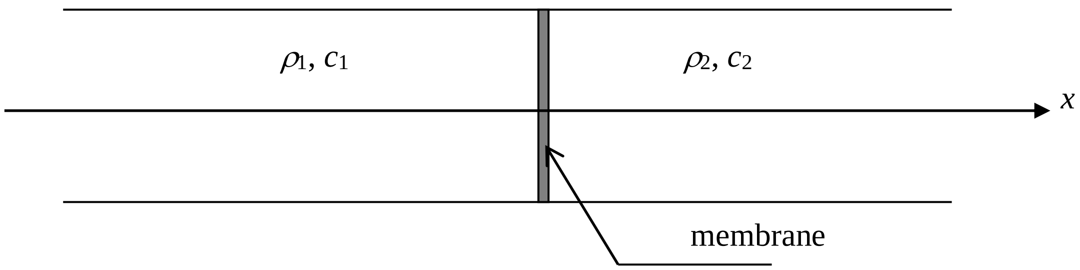
a) Déterminer les fréquences f_0 du fondamental et f_1 du premier harmonique.
b) A la fréquence f_1 on a mesuré une amplitude maximale des élongations de l’air égale à $a_0 = 1$ mm. En déduire l’amplitude maximale correspondante :

- p_{max} pour la surpression ;
- τ_0 pour la température.

Réponses : $f_0 = 85{,}3$ Hz ; $p_{max} = 668$ Pa ; $\tau_0 = 0.55$ K.

Exercice 3 : Réflexion sur une membrane
Interface matérielle entre deux fluides, la membrane modifie la condition à la limite sur la surpression

Une membrane, de masse surfacique σ, est infiniment mince, elle est située en $x = 0$. Elle peut coulisser sans frottement dans le tuyau horizontal et sépare deux fluides parfaits. On note ρ_i et c_i la masse volumique et la célérité des ondes acoustiques dans chacun des deux demi tuyaux (i = 1 ou 2). Une onde incidente plane progressive harmonique de pulsation ω arrive sur la membrane, elle est décrite par la pression acoustique $\underline{p}_i(x,t) = p_0 e^{j(\omega t - k_1 x)}$.
Le tuyau est supposé illimité.



1°) En utilisant les coefficients de réflexion $\underline{r}$ et de transmission $\underline{t}$ concernant les amplitudes de pression de l'onde réfléchie et de l’onde transmise, écrire les ondes réfléchies et transmise.

2°) Justifier que la vitesse de l’onde en x = 0 est continue. En déduire une relation entre r et t. Appliquer le principe fondamental de la dynamique à la membrane et en déduire une autre relation.

3°) Montrer que $\underline{t} = \dfrac{2Z_2}{Z_1 + Z_2 + j\sigma\omega}$ et que $\underline{r} = \dfrac{Z_2 - Z_1 + j\sigma\omega}{Z_1 + Z_2 + j\sigma\omega}$ où Z_i est l’impédance acoustique d’une onde plane progressive dans le sens des x croissants dans le milieu i, définie par $Z = \dfrac{\underline{p}(x,t)}{\underline{u}(x,t)}$ où u est la vitesse du fluide.
Déterminer les ondes transmise et réfléchie.

4°) Les milieux de part et d’autre de la membrane sont identiques, donner les coefficients de transmission et de réflexion dans ce cas. Examiner les cas limites d’une masse surfacique très faible, et d’une masse surfacique très grande. Interprétation.

!!! Supplément non-distribué !!!

Exercice 4 : Amortissement par rayonnement

On considère un piston de section S et de masse m sans frottements dans un tube horizontal ouvert en x = 0 et se prolongeant à l'infini. L'air contenu dans le tube a une masse volumique ρ et une onde acoustique une célérité C. Le piston est lancé de l'abscisse x = 0 avec une vitesse initiale u_0 vers les x croissant ; on note u(t) sa vitesse à un instant t. On constate qu'il s'arrête après avoir parcouru une distance finie que l'on supposera faible de manière à considérer que l'abscisse du piston reste approximativement nulle.
Le mouvement du piston engendre une onde progressive plane décrite par la vitesse v(x,t) et la surpression p(x,t). Pour simplifier, on suppose que la pression à gauche du piston reste égale à P_0.

a) Ecrire le principe fondamental de la dynamique appliqué au piston, et en exploitant la notion d'impédance, en déduire que : $m\frac{du(t)}{dt} = -\rho CSu(t)$.
En déduire l'expression de u(t). Définir un temps caractéristique et commenter ses variations avec m et S.
b) Déduire de l'expression de u(t) celle de v(x,t) et la representer graphiquement en fonction de x à un instant t = t_0 fixé.
c) Calculer la densité volumique d'énergie de l'onde ; par intégration sur tout le volume occupé par l'onde à un instant t, établir l'expression générale de l'énergie totale de l'onde à un instant t en fonction de m, u0 et u(t). Interpréter physiquement le résultat, et expliquer pourquoi le piston s'arrete malgré l'absence de frottement.

Exercice 3 : Pavillon exponentiel, adaptation d'impédance (E3A PSI 2011)

On admet $\vec{v}(x,t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\overrightarrow{e_x}$ où $u(x,t)$ est le déplacement de la paroi d'une particule de fluide (située en x au repos)

DEUXIEME PARTIE
REFLEXION ET TRANSMISSION EN INCIDENCE NORMALE

D / TUYAU SONORE : INFLUENCES DES FLUIDES ET D'UN RACCORDEMENT

Une conduite est constituée de deux tubes cylindriques de sections respectives S_1 et S_2, de même axe x'x et séparés par le plan $x = 0$. Deux fluides non miscibles se répartissent de part et d'autre de ce plan (figure 2).

- *$x < 0$: le fluide **1** est de masse volumique μ_1 ; le son s'y propage à la célérité C_1 ;*
- *$x > 0$: le fluide **2** est de masse volumique μ_2 ; le son s'y propage à la célérité C_2.*

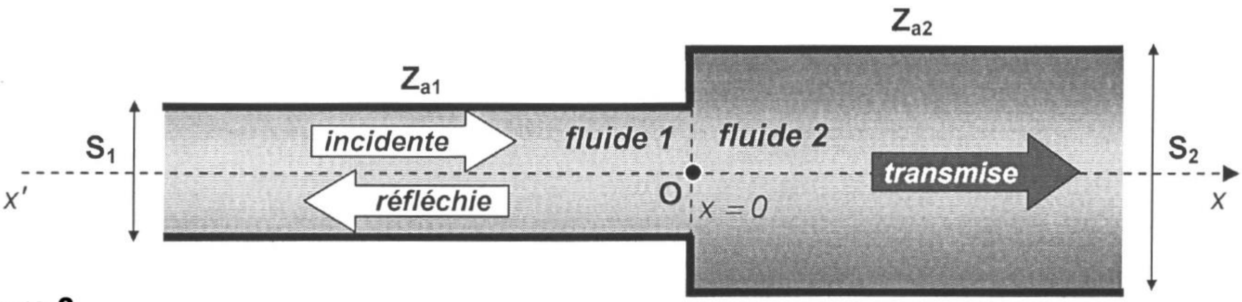


Figure 2

Les impédances acoustiques Z_{a1} et Z_{a2} des tubes de sections respectives S_1 et S_2 sont liées aux impédances caractéristiques Z_1 et Z_2 des milieux par les relations :

$$Z_{a1} = \frac{\mu_1 C_1}{S_1} = \frac{Z_1}{S_1} \quad \text{pour } x < 0 \qquad Z_{a2} = \frac{\mu_2 C_2}{S_2} = \frac{Z_2}{S_2} \quad \text{pour } x > 0 \qquad \text{avec } \alpha = \frac{Z_{a1}}{Z_{a2}}.$$

*Une onde de pression plane progressive harmonique incidente $p_i(x,t)$ se propage dans le milieu **1** selon le sens des x croissants. La discontinuité de l'impédance au niveau du raccordement donne naissance en $x = 0$ à :*

- *une onde de pression transmise dans le milieu **2**, $p_t(0,t)$ dont la puissance est $\mathscr{P}_t$,*
- *une onde de pression réfléchie dans le milieu **1**, $p_r(0,t)$ dont la puissance est $\mathscr{P}_r$.*

Les pressions acoustiques incidente, transmise et réfléchie s'expriment par :

$$p_i\,(x,t)=P_{im}\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{C_1}\right)\right] \qquad p_t\,(x,t)=P_{tm}\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{C_2}\right)\right] \qquad p_r\,(x,t)=P_{rm}\cos\left[\omega\left(t+\frac{x}{C_1}\right)\right]$$

La puissance moyenne $\langle \mathscr{P}_i \rangle$ est associée à l'onde incidente. Les coefficients de réflexion R et de transmission T en puissance sont définis par les valeurs absolues des rapports des puissances moyennes transportées :

$$R=\left|\frac{\langle \mathscr{P}_r\rangle}{\langle \mathscr{P}_i\rangle}\right| \quad et \quad T=\left|\frac{\langle \mathscr{P}_t\rangle}{\langle \mathscr{P}_i\rangle}\right|.$$

D1. Montrer que le déplacement incident, correspondant à $p_i\,(x,t)$, s'écrit sous la forme : $u_i\,(x,t)=U_{im}\cos\left[\omega\left(t-\dfrac{x}{C_1}\right)-\dfrac{\pi}{2}\right]$. Exprimer U_{im} en fonction de P_{im}, ω, C_1 et μ_1.

D2. Donner les puissances moyennes transportées $\langle \mathscr{P}_i\rangle$, $\langle \mathscr{P}_r\rangle$ et $\langle \mathscr{P}_t\rangle$ en fonction de P_{im}, P_{rm}, P_{tm} et des impédances acoustiques des tubes, notées Z_{a1} et Z_{a2}.

D3. Enoncer, en les justifiant, les conditions de passage de l'onde à l'interface des deux fluides. En déduire deux équations reliant P_{im}, P_{rm}, P_{tm} et α.

D4. Déterminer, en fonction de α, les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude de pression : $r_P=\dfrac{p_r\,(0,t)}{p_i\,(0,t)}$ et $t_P=\dfrac{p_t\,(0,t)}{p_i\,(0,t)}$.

D5. Exprimer les coefficients de réflexion R et de transmission T en puissance à travers l'interface en fonction du seul coefficient α.
Quelle relation existe-t-il entre R et T ? Que traduit-elle ?

Influence des deux milieux pour une conduite de section constante : $S_1=S_2=S_0$

La discontinuité de l'impédance au niveau du raccordement est liée à la différence de nature entre les deux fluides.

D6. Le milieu **2** est l'air, d'impédance caractéristique Z_{air2} et le milieu **1** l'intérieur du corps humain dont les constituants sont caractérisés par une impédance caractéristique $Z_{corps1}\gg Z_{air2}$. Evaluer r_P et t_P, puis T et R. Commenter.
Calculer l'atténuation en décibel $T_{dB}=10\log(T)$, correspondant au coefficient de transmission $T=1{,}7.10^{-3}$. Pourquoi le médecin utilise-t-il un stéthoscope pour écouter les battements cardiaques ou les murmures respiratoires ? *Donnée : $\log 17\approx 1{,}2$.*

Influence du raccordement des deux conduites pour un fluide unique : $\alpha=S_2/S_1$

Un fluide de masse volumique au repos μ_0 dans lequel le son se propage à la célérité C occupe la conduite constituée des deux tubes de sections différentes S_1 et S_2. La discontinuité de l'impédance au niveau du raccordement est représentée par le changement de section.

D7. Tracer l'allure de la fonction $R(\alpha)$. Pour quelle valeur de α, y a-t-il adaptation de l'impédance ? Commenter les cas limites : $S_2\ll S_1$ et $S_2\gg S_1$.

E / PAVILLON EXPONENTIEL ET ADAPTATION DE L'IMPÉDANCE

Un pavillon acoustique rigide de longueur L, d'axe de révolution Ox et de section circulaire S(x) (figure 3) contient un fluide au repos de pression P_0, de masse volumique μ_o et de coefficient de compressibilité isentropique χ_S constant. Les effets de pesanteur sont négligés.

Le pavillon acoustique est intercalé dans le raccordement de deux conduites de sections S(0) et S(L) comme l'indique la figure 4 ci-dessous :

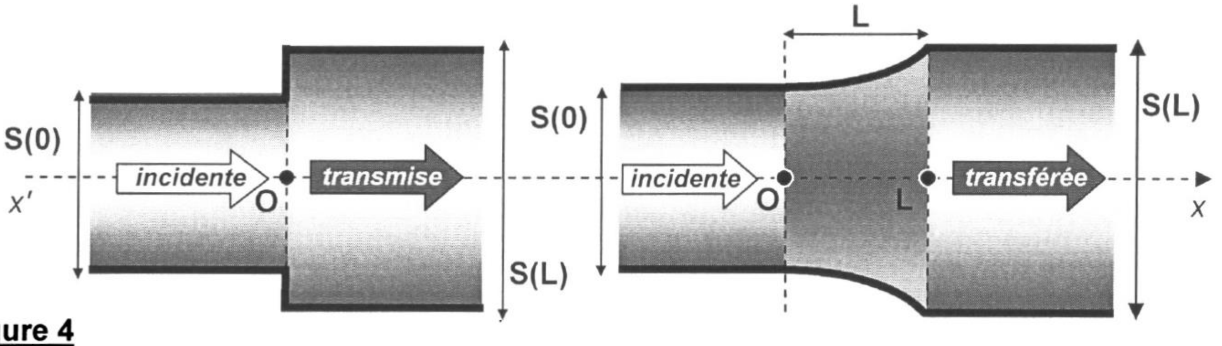


Figure 4

E10. Déterminer, pour $\omega > 10\,\omega_C$, le coefficient de transmission $T_{pav} = \dfrac{\langle \mathscr{P}_{transférée} \rangle}{\langle \mathscr{P}_{incidente} \rangle}$ relatif aux puissances acoustiques incidente à l'entrée et transférée à la sortie du pavillon de longueur L. Que peut-on dire du rapport des intensités sonores transférée et incidente $\dfrac{I_{transférée}}{I_{incidente}}$? Commenter.

E11. Comparer T_{pav} au coefficient de transmission en puissance T de la conduite en l'absence de pavillon (situation considérée aux questions D5. et D7.) en exprimant le rapport $\dfrac{T_{pav}}{T}$ en fonction de α. Préciser la valeur numérique de ce rapport pour $\alpha = 9$. Commenter en précisant le gain en décibel obtenu par le pavillon intercalé.
Donnée : *log36 ≈ 1,56.*

$$\frac{1}{C^2}\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2} = \frac{d\ln S(x)}{dx}\frac{\partial p(x,t)}{\partial x}.$$

La section circulaire du pavillon varie selon la loi : $S(x) = S(0)\,e^{x/a}$, avec $a > 0$.

E3. Sachant que l'onde sonore se propage à la célérité C, écrire l'équation de propagation précédente en fonction de C, a et de dérivées spatiales et temporelles de $p(x,t)$.

L'onde sonore est considérée plane progressive harmonique, de la forme :

$$\underline{p}(x,t) = P_m \exp\left[j\left(\omega t - \underline{k}x\right)\right].$$

Le nombre d'onde $\underline{k}$ est, a priori, complexe : $\underline{k} = k' - j\,k''$, k' et k'' étant réels.

E4. Mettre en évidence dans l'expression de $\underline{p}(x,t)$ les termes d'amortissement et de propagation.

E5. Etablir la relation de dispersion reliant $\underline{k}$, ω, a et C.

E6. Montrer que le pavillon se comporte comme un filtre passe-haut ; préciser sa pulsation de coupure ω_C en fonction de a et C.

E7. Exprimer la fréquence de coupure f_C en fonction de C, L, S(0) et S(L).

❖ *La fréquence de coupure du pavillon acoustique est $f_C = 150$ Hz .*

E8. L'onde sonore progressive se propage suivant $x > 0$. Déterminer le réel k' en fonction de C, ω_C et ω, ainsi que le réel k'' en fonction uniquement de a.

E9. Déterminer la puissance moyenne transférée par l'onde sonore à travers la surface S(x) perpendiculaire à sa direction de propagation, en fonction de P_m, μ_0, C, S(0), ω et ω_C. Commenter.