EMag chap. 8 ARQS - Induct°

1.1. Déf° ARQS

→ un exple mécanique pour commencer : chute libre ressort

https://www.youtube.com/watch?v=6l_gEp7Q1h8

- Extrémité basse du ressort ne se met en mvt que lorsqu'elle "reçoit l'informat°", i.e. qd elle est atteinte par l'onde de compress°.

- Idem pour un stylo tenu verticalt et lâché, MAIS
  - → matériau bcp ⊕ raide
    - ⇒ déformat° invisible à l'oeil
    - et onde se propage bcp ⊕ vite (~ 5000 m s⁻¹)

Cas du stylo : on peut négliger la durée de propagat° de l'onde devant la durée de chute libre du stylo

→ En EMique : dans les circuits élecqs par exple

ARQS : une modif° en un pt du circuit se répercute instantanémt partout.

$$\boxed{\tau_{propag} \ll T_{caractiq}}$$

période T d'un rég. sinus p.e.

La m̂ chose en mètres :

$$\boxed{\lambda \gg \text{taille } L \text{ du circuit}}$$

$\lambda = \frac{c}{f}$, $f_{lim} = \frac{c}{\lambda} = \frac{3\,10^8}{1}$

$f \ll 300\,\text{MHz}$

Rq : adaptable à une "situat° EMique" qcq.

1.2.

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \sim 0$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

Grandeurs x^{is} : T, L, E, B, j

Rq : $\mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$ (cf. chap. OEM vide)

$$\frac{\left\| \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\|}{\left\| \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} \right\|} \sim \frac{\frac{1}{c^2} \frac{E}{T}}{B/L} = \frac{E}{B} \frac{L}{c^2 T}$$

Or M Faraday : $\frac{E}{L} \sim \frac{B}{T} \Rightarrow E = \frac{BL}{T}$

$$\sim \frac{L^2}{c^2 T^2} \qquad \text{Or } \frac{L}{c} = \tau_{propag}$$

$$\sim \left(\frac{\tau_{propag}}{T} \right)^2 \ll 1 \text{ dans ARQS.}$$

CCL : dans l'ARQS, le terme $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ est négligeable.

2.1. Exemple simple d'une spire fermée ou quasi-fermée

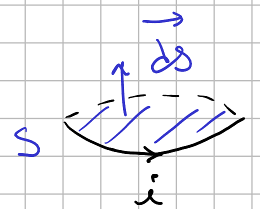
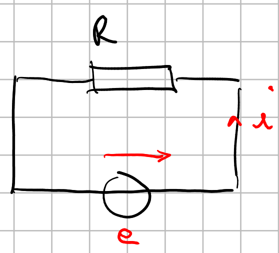


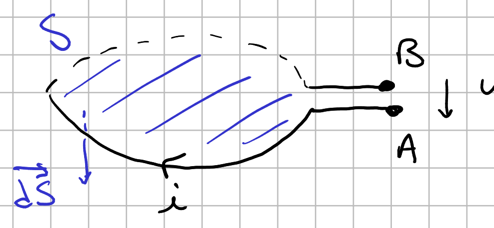
schéma équivalent

$\vec{dS}$ ⊙ (vue de dessus)



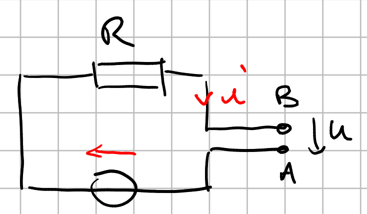
$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

NB : S peut être une surface qui s'appuie sur le circuit



même si $i = 0$!

sch. équivalent



⊗ $\vec{dS}$ (vue de dessus)

$$e = -\frac{d\phi}{dt}$$

$$u_{(AB)} = R i_{(AB)} - e_{(AB)}$$

Rq : Attent°, certaines situat° ne peuvent pas ê. traitées avec cette version de la loi de Faraday

Exo bobine / aimant :

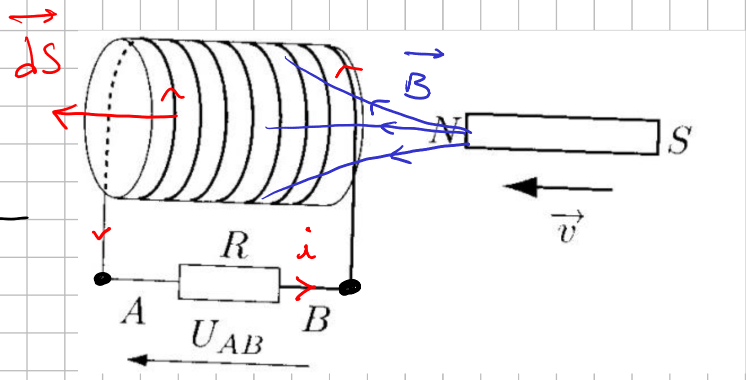
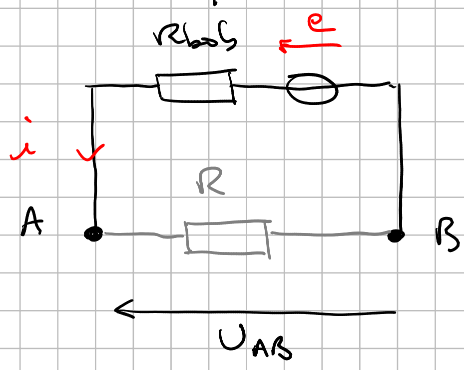


schéma équivalent



$e = -\dfrac{d\Phi_{bob}}{dt}$ avec $\Phi_{bob} = N\,\Phi_{spire}$

et $\Phi_{spire} = \iint_{S_{spire}} \vec{B}\cdot\vec{dS}$ > 0 car $\vec{B} \approx$ m̂ sens que $\vec{dS}$

Qd aimant approche,

$\|\vec{B}\|$ au niveau des spires $\nearrow \Rightarrow \Phi_{spire} \nearrow$

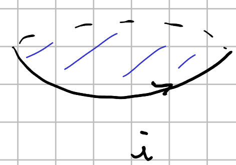
$\Rightarrow \dfrac{d\Phi_{bob}}{dt} > 0 \Rightarrow e < 0$

Or c'est la fém e qui provoque le courant i = la fém joue rôle d'une source de tension

Donc $i < 0$, donc $U_{AB} < 0$.

ou : loi mailles $e = (R_{bob} + R)\, i = (R_{bob} + R)\dfrac{U_{AB}}{R}$

2.5. circuit fixe plongé dans $\vec{B}(t)$



Soit contour fermé (Γ) confondu avec le circuit, orienté dans un sens quel.

Soit S surface qui s'appuie sur (Γ) et $\vec{dS}$ orientée avec main droite.

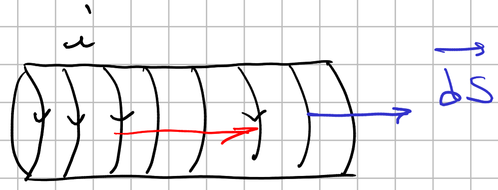
MFaraday : $\vec{rot}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$\iint_S \vec{rot}\,\vec{E}\cdot\vec{dS} = \iint_S -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot\vec{dS} = -\dfrac{d\Phi}{dt}$

$\oint_{(\Gamma)} \vec{E}\cdot\vec{dl}$

$$\boxed{e = \oint_{(\Gamma)} \vec{E}\cdot\vec{dl}} \neq 0 !$$

3.3.



i : "i_{propre}"

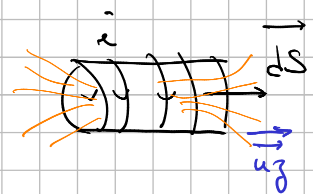
Φ_{propre} prop^{el} à i_{propre}.

Cette loi de proportionnalité définit le coeff. d'ind. propre

⚠ | L est indpt de Φ_{propre} et i_{propre}
| L dpd de la géom^{ie} du bobinage

Rq : Compte-tenu des orientat^{o}, $\vec{B}_{propre}$ est de m̂ sens que $\vec{dS}$
donc $L \geq 0$.
On retrouvera ce résultat avec l'enj (pour géom^{ie} qcq)

→ Exple solénoïde :



N spires, longueur ℓ, sect^{o} S.

Avec hyp. solénoïde ∞ (i.e. $L^2 >> S$), $\vec{B} = \mu_0 \frac{N}{\ell} i \vec{u_z}$

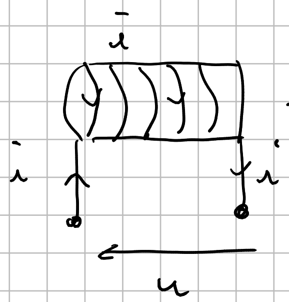
Or $\Phi_{bob} = N \Phi_{spire}$ et $\Phi_{spire} = \iint_{sect\,S} \vec{B} \cdot \vec{dS}$

$$= \iint_S \mu_0 \frac{N}{\ell} i \vec{u_z} \cdot dS \vec{u_z}$$

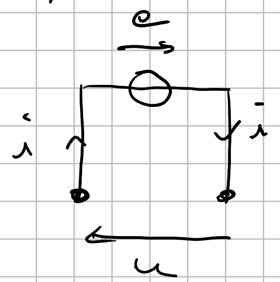
d'où $\Phi_{bob} = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} i S$

CCl^{o} : $\boxed{L = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} S}$

→ dém^{o} de "$u = L \frac{di}{dt}$" pour bobinage isolé



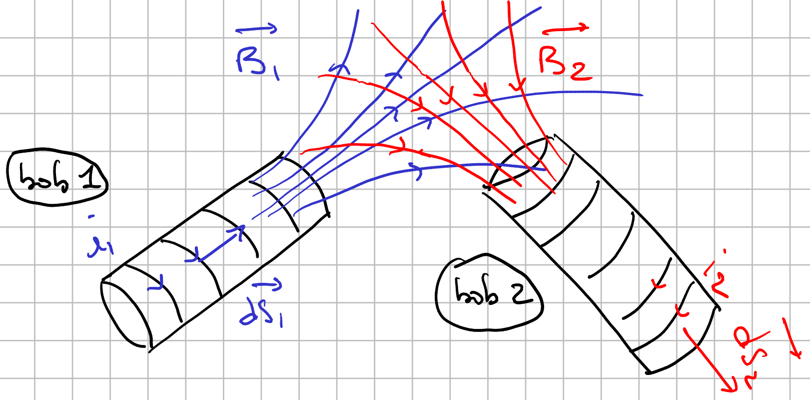
→ sch. équivalent



Loi mailles : $u = -e = \frac{d\Phi_{bob}}{dt}$ ↑ Faraday

$u = L \frac{di}{dt}$.

3.4.



$\phi_{1\to 2}$ prop^{el} à i_1

$\phi_{2\to 1}$ prop^{el} à i_2

↓

déf^{o} de $M_{1\to 2}$ et $M_{2\to 1}$ } égaux "M"

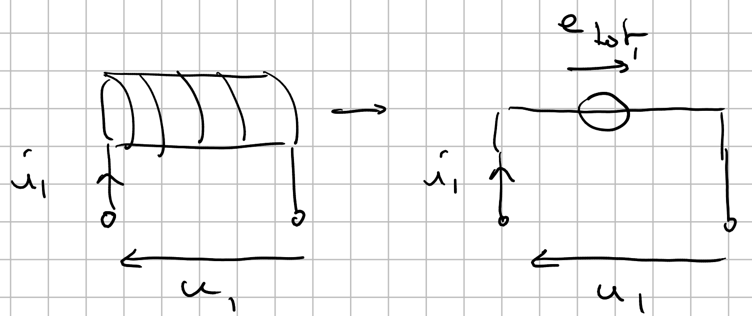
(!) | M indpt de i_1 et i_2 (et des flux)
| M dpd des géom^{ies} des bobinages
et de leur orientat^{o} relative

→ Considérons bobine 1 : $\phi_{tot\ dans\ 1} = \phi_{propre\ 1} + \phi_{2\to 1}$

$= L_1 i_1 + M i_2$

Idem pour bobine 2 : $\phi_2 = L_2 i_2 + M i_1$

→ Schéma équivalent bobine 1 :

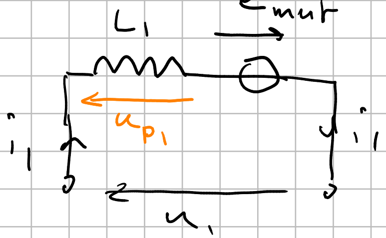


$$e_{tot_1} = -\frac{d\phi_{tot_1}}{dt}$$

$$= -L_1\frac{di_1}{dt} - M\frac{di_2}{dt}$$

Rq : on pourra trouver aussi (livres, énoncés concours) :

sch. équival :

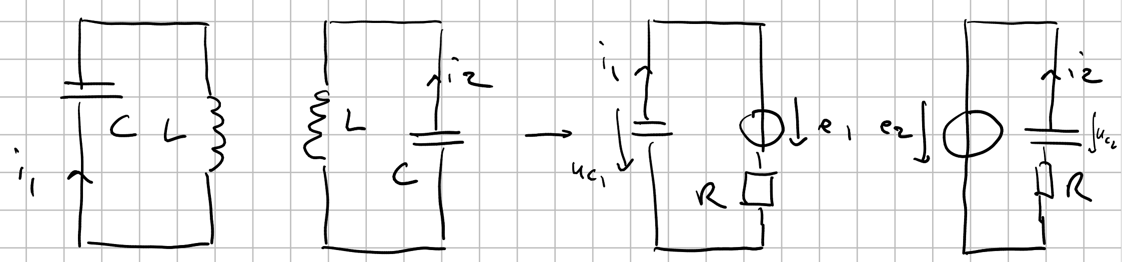


$$e_{mut} = -\frac{d\phi_{2\to 1}}{dt}$$

$$= -M\frac{di_2}{dt}$$

$$u_{p1} = L_1\frac{di_1}{dt}$$

→ Exercice :



Loi mailles : $e_1 = R i_1 + u_{C_1}$ idem : $\frac{de_2}{dt} = R\frac{di_2}{dt} + \frac{i_2}{C}$

$$\frac{de_1}{dt} = R\frac{di_1}{dt} + \frac{i_1}{C}$$

avec
$$\begin{cases} e_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -L\frac{di_1}{dt} - M\frac{di_2}{dt} \\ e_2 = -L\frac{di_2}{dt} - M\frac{di_1}{dt} \end{cases}$$

d'où
$$\begin{cases} L\frac{d^2 i_1}{dt^2} + M\frac{d^2 i_2}{dt^2} + R\frac{di_1}{dt} + \frac{i_1}{C} = 0 \\ \text{idem : } L\frac{d^2 i_2}{dt^2} + M\frac{d^2 i_1}{dt^2} + R\frac{di_2}{dt} + \frac{i_2}{C} = 0 \end{cases}$$

EDiff couplées... il faut $i_2(t)$ pour trouver $i_1(t)$ et inversement...

Somme m. à m. : $(L+M)\frac{d^2 s}{dt^2} + R\frac{ds}{dt} + \frac{s}{C} = 0$

$$\boxed{\frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{R}{L+M}\frac{ds}{dt} + \frac{1}{(L+M)C}\, s = 0}$$ avec $s = i_1 + i_2$

Diff^{ce} m. à m. = $$\boxed{\frac{d^2 D}{dt^2} + \frac{R}{L-M}\frac{dD}{dt} + \frac{1}{(L-M)C}\, D = 0}$$

avec $D = i_1 - i_2$

NB : on verra que $L \geq M$.

En négligeant R : $\ddot{s} + \omega_{0_s}^2 s = 0$ et $\ddot{D} + \omega_{0_D}^2 D = 0$

avec
$$\omega_{0_S}^2 = \frac{1}{\frac{1}{\omega_0^2} + \frac{1}{\delta\omega^2}}$$
$$\omega_{0_D}^2 = \frac{1}{\frac{1}{\omega_0^2} - \frac{1}{\delta\omega^2}}$$

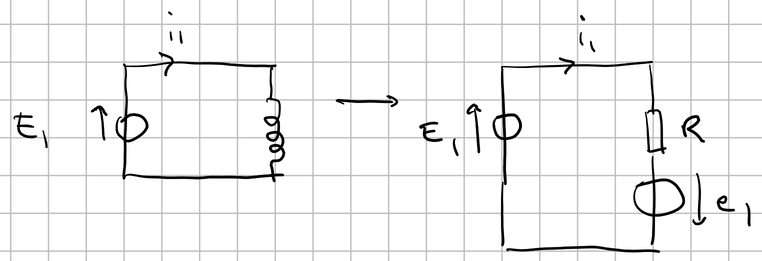
$$\begin{cases} s(t) = S_0 \cos(\omega_{0_s} t + \varphi_s) \\ D(t) = D_0 \cos(\omega_{0_D} t + \varphi_D) \end{cases}$$

$$\begin{cases} i_1(t) = \frac{S+D}{2} = \dots \\ i_2(t) = \frac{S-D}{2} = \dots \end{cases}$$

$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ $\delta\omega^2 = \frac{1}{MC}$

NB : Intérêt des coeff. d'inductance : travailler avec les flux magn.s SANS calculer des intégrales.

3.5.



Loi mailles :

$$E_1 = R i_1 - e_1$$

$$\rightarrow E_1 i_1 = R i_1^2 - e_1 i_1$$

$$e_1 i_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt} \times i = -L \frac{di_1}{dt} \times i_1 = -\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} L i_1^2\right)$$

d'où

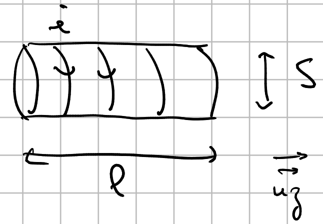
$$\boxed{E_1 i_1 = R i_1^2 + \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} L i_1^2\right)}}$$

P fournie par alim

P reçue par R et dissipée par Joule

P reçue par bobine et qui fait varier le stock $\frac{1}{2} L i^2$

→



$$\vec{B} = \mu_0 \frac{N}{\ell} i \, \vec{u_z}$$

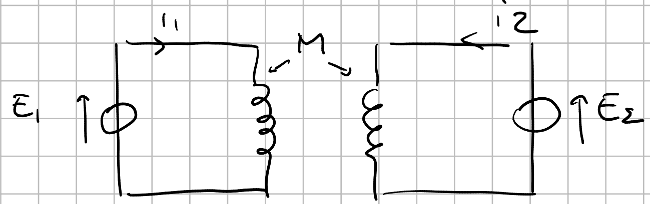
$$E_{mag} = \iiint_{V \text{ où } \exists \text{ chp}} \underbrace{\frac{B^2}{2\mu_0}}_{\geq 0} d\tau = \mu_0 \frac{N^2}{2\ell^2} i^2 \times S\ell$$

Or $L = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} S$

donc $\underset{\geq 0}{E_{mag}} = \frac{1}{2} L i^2 \Rightarrow L \geq 0$

CICO : nrj stockée "par bobine" s'identifie à celle stockée par B.

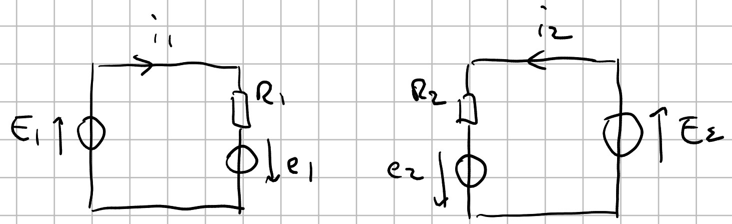
3. 6.



$$e_1 = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$$

$$e_2 = -L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}$$

→



Loi mailles puis "$\times i_1$" et "i_2" :

$$\left|\begin{array}{l} E_1 i_1 = R_1 i_1^2 + i_1\left(L_1 \dfrac{di_1}{dt} + M \dfrac{di_2}{dt}\right) \\ E_2 i_2 = R_2 i_2^2 + i_2\left(L_2 \dfrac{di_2}{dt} + M \dfrac{di_1}{dt}\right) \end{array}\right.$$

Somme :

$$\boxed{E_1 i_1 + E_2 i_2 = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2\right)}$$

$$\boxed{E_{mag} = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 .}$$

→ Or $E_{mag} = \iiint_{V \text{ où } \exists \text{ chp } \vec{B}} \frac{B^2}{2\mu_0} \, d\tau \; \boxed{\geq 0}$

donc $\frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 \geq 0 \quad \forall (i_1, i_2)$

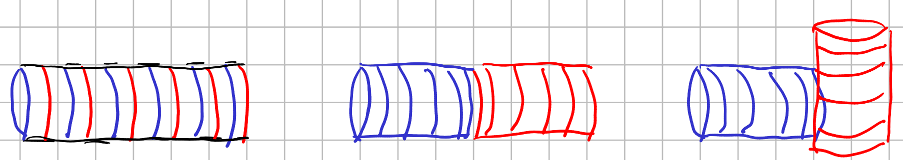
Posons $x = \frac{i_2}{i_1}$, on a $\frac{1}{2} L_2 x^2 + M x + \frac{1}{2} L_1 \geq 0 \; \forall x$

Graphiqt :

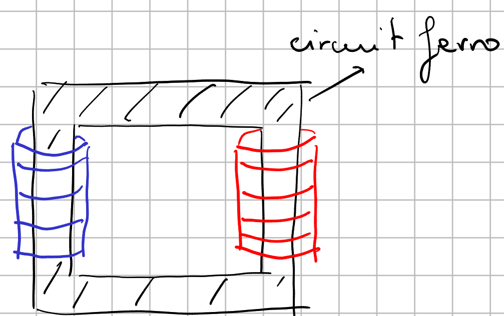
CNS : $\Delta \leq 0$

avec $\Delta = M^2 - 4 \times \frac{L_1 L_2}{4}$ d'où $\boxed{M^2 \leq L_1 L_2}$

3.7.



$M \sim L$ $\quad$ $M \sim \frac{L}{5}$ $\quad$ $M \sim \frac{L}{20}$



$M \sim 0{,}9 \, L$