

DS 1 -- Systèmes linéaires – Statique des fluides (28/09/2013 – 4h)
--

Extrait des Instructions générales des concours

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Toute réponse non justifiée ne donnera pas lieu à l'attribution de points.

Toute application numérique ne comportant pas d'unité ne donnera pas lieu à l'attribution de points.

Les différents exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre choisi par le candidat. Il prendra toutefois soin de bien numéroter les questions.

Vous numéroterez toutes vos pages. Si vous rendez 5 pages, vous devez numéroter 1/5, 2/5, 3/5, etc.

Aucune sortie n'est autorisée avant 12h

Problème 1 : Immersion d'un sous-marin (CCP TSI 2012)

Nous nous proposons, dans ce problème, d'étudier quelques dispositifs relatifs aux sous-marins. Dans tout ce problème, le référentiel terrestre sera supposé galiléen et le champ de pesanteur uniforme.

Les trois parties du problème sont indépendantes.

Première partie : immersion du sous-marin

Les données nécessaires pour cette première partie sont rassemblées ci-dessous :

- pression atmosphérique : $P_{atm} = 10^5$ Pa,
- masse volumique de l'eau de mer à la surface $\rho(0) = \rho_0 = 1,03 \cdot 10^3$ kg.m⁻³,
- champ de pesanteur terrestre : $g = 9,81$ m.s⁻²,
- masse du sous-marin (hors masse du fluide dans les ballasts) : $M = 1,40 \cdot 10^7$ kg,
- longueur du sous-marin : $L = 138$ m,
- rayon du sous-marin (rayon de la coque extérieure) : $R = 6$ m.

1/ Relation entre pression et profondeur dans l'eau de mer

1.1/ On s'intéresse à un volume élémentaire $d\tau = dx dy dz$ d'eau de mer à l'équilibre (figure 1). On notera $P(x, y, z)$ la pression de l'eau en un point de coordonnées (x, y, z) .

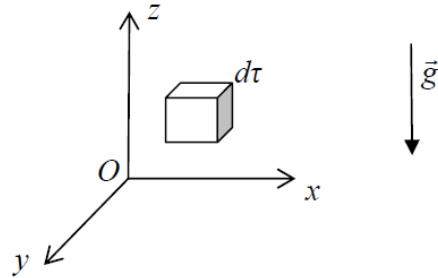


Figure 1 : équilibre d'un volume élémentaire

Citer les forces s'exerçant sur ce volume élémentaire.

En traduisant l'équilibre de ce volume $d\tau$, montrer que la pression ne dépend pas des coordonnées x et y .

Donner alors l'expression de la résultante des forces s'exerçant sur $d\tau$ en fonction de g , $\rho(z)$, $P(z)$, $P(z + dz)$, dx , dy , dz et $\vec{e}_z$ vecteur unitaire de l'axe (Oz) ascendant. En déduire la relation fondamentale de la statique des fluides $\frac{dP}{dz} = -\rho g$ (1).

1.2/ On suppose que l'eau de mer est incompressible et homogène, c'est-à-dire que sa masse volumique ρ est constante. Intégrer dans ces conditions l'équation (1) et en déduire l'expression de la pression $P(z)$ à la cote z en fonction de ρ , g , z et $P_0 = P(z = 0)$.

Calculer numériquement la pression P_{300} à 300 m de profondeur, en prenant $P_0 = P_{atm}$ et $\rho = \rho_0$.

2/ Utilisation des ballasts

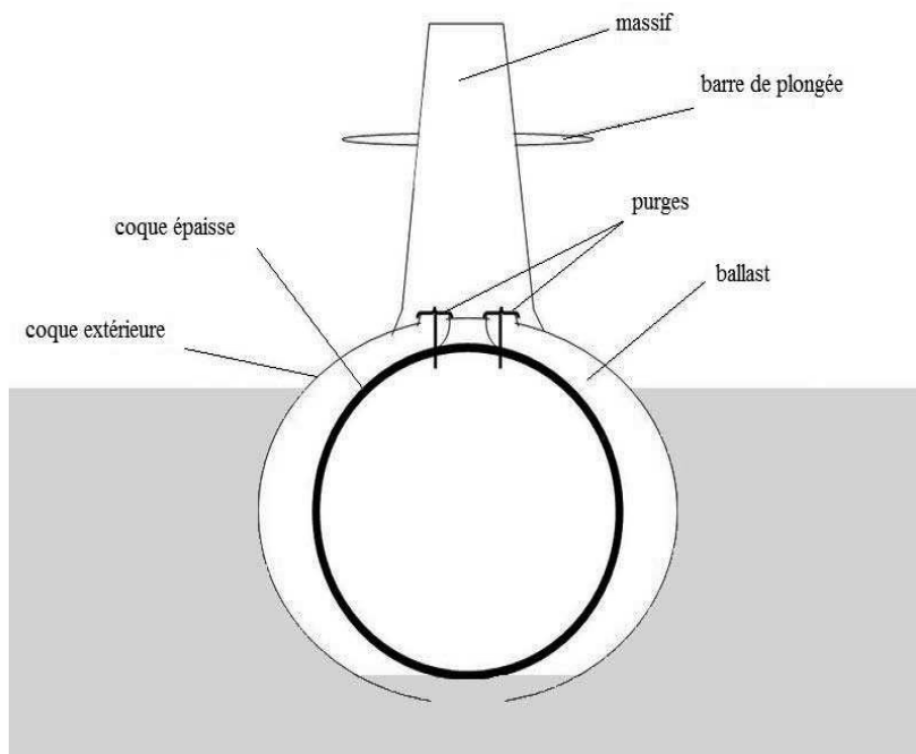


Figure 2 : schéma simplifié du sous-marin

Pour permettre au sous-marin de monter et de descendre, un système de ballasts pouvant se remplir d'eau ou d'air permet de modifier sa masse. Les ballasts sont des réservoirs situés entre la coque extérieure et la coque épaisse des sous-marins (figure 2).

On considère toujours l'eau de mer homogène et incompressible, de masse volumique uniforme et égale à ρ_0 .

2.1/ On suppose dans cette question que le sous-marin flotte à la surface de l'eau. Les ballasts sont alors remplis d'air. En négligeant la poussée d'Archimède dans l'air ainsi que le poids de l'air contenu dans les ballasts, donner la relation entre le volume total immergé du sous-marin V_{imm} , sa masse M et la masse volumique de l'eau de mer ρ_0 .

2.2/ On modélise le sous-marin par un cylindre de longueur L et de rayon R . Donner l'expression du rapport $\frac{V_{imm}}{V}$ où V est le volume total du sous-marin ainsi modélisé, en fonction de M , ρ_0 , L et R . Effectuer l'application numérique et commenter.

2.3/ Expliquer qualitativement ce qui se passe quand on remplace progressivement l'air contenu dans les ballasts par de l'eau de mer.

2.4/ Le sous-marin est en immersion quand les ballasts sont entièrement remplis d'eau de mer. Donner la relation entre M , V , le volume des ballasts V_b et la masse volumique de l'eau de mer ρ_0 . Calculer numériquement le volume des ballasts V_b .

2.5/ Expliquer qualitativement pourquoi la coque intérieure doit être épaisse et très résistante, alors que la coque extérieure est plus mince et légère.

Problème 2 : Oscillateur pour détecteur de métal (Centrale TSI 2007)

Le problème étudie un dispositif susceptible de détecter la présence d'un matériau métallique situé à une distance plus ou moins grande d'un capteur selon la sensibilité du dispositif. Les différentes parties qui analysent le fonctionnement des éléments successifs constituant le détecteur sont indépendantes et la dernière partie qui appréhende le capteur dans son intégralité prend en compte l'interaction de tous les éléments.

Le principe de détection s'appuie sur le phénomène de couplage magnétique de deux circuits conducteurs qui engendre une variation de l'inductance apparente d'un circuit.

La partie I n'est pas traitée par la suite, mais n'est pas nécessaire pour aborder les parties II et III. Le début de l'énoncé de la partie III mentionne la partie I, mais pas d'inquiétude : ces propos introductifs ne sont pas nécessaires pour traiter les questions de la partie III.

II.B - Montage oscillateur

II.B.1) Conditions de démarrage des oscillations

Le dipôle d'entrée est désormais connecté (figure II.A) au dipôle formé de l'association série d'un condensateur de capacité C et d'une inductance L . Lorsque les dipôles sont connectés, l'intensité circulant dans l'inductance est initialement nulle et le condensateur présente une tension $u_c(t=0) = U_0$ suffisamment faible pour que $|u_s| < V_{\text{sat}}$.

a) Montrer que $i_e(t)$ est solution de l'équation différentielle (E) du second ordre

$$\frac{d^2 i_e}{dt^2} + 2\xi\omega_0 \frac{di_e}{dt} + \omega_0^2 i_e = 0.$$

Exprimer l'amortissement ξ et ω_0 en fonction de L , C , R_1 , r et α .

b) D'après les conditions initiales, quelles sont les valeurs de $i_e(t=0)$ et

$\frac{di_e}{dt}(t=0)$? On suppose que $|\xi| < 1$. Expliciter la solution $i_e(t)$.

c) Que se passe-t-il si U_0 est nul ? Commenter.

d) On suppose donc que U_0 n'est pas nul mais de très faible valeur. Quelle est la condition sur ξ puis sur α pour que les oscillations de i_e présentent une amplitude croissante au cours du temps ? On suppose désormais que cette condition est réalisée.

e) Application numérique :

$r = 1 \text{ k}\Omega$, $R_1 = 100 \text{ }\Omega$, $C = 1,28 \text{ nF}$, $L = 2 \text{ mH}$, $\alpha = 0,35$.

Calculer la valeur de ξ et de $T_0 = 2\pi/\omega_0$

II.B.2) Amplitude des oscillations

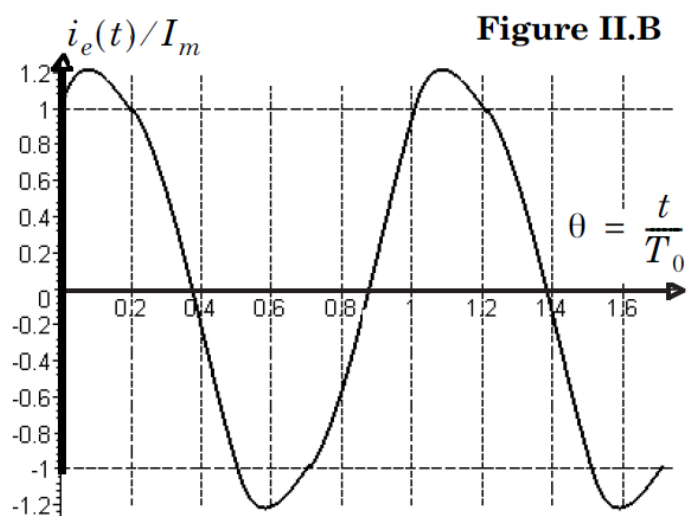
a) Représenter l'allure de l'évolution de $i_e(t)$ en fonction du temps à compter de $t=0$. En utilisant la caractéristique d'entrée établie en II.A.2, montrer que cette loi d'évolution n'est valable que sur une durée limitée. Donner l'autre équation différentielle régissant l'évolution de $i_e(t)$.

b) Après un régime transitoire que l'on n'étudiera pas, les variations de i_e en fonction du temps suivent un régime périodique établi. La figure

II.B montre les évolutions de i_e/I_m en fonction de la variable réduite $\theta = t/T_0$.

Déterminer les domaines de cette courbe qui se rapportent respectivement aux zones (1), (2) et (3) de la caractéristique d'entrée de $\mathcal{C}_1$.

c) Comment qualifier les oscillations représentées en figure II.B ? Évaluer la période, puis la fréquence f de ces oscillations ainsi que la valeur maximale de i_e .



Application numérique :

$R = 2,5 \text{ k}\Omega$ et $V_{\text{sat}} = 15 \text{ V}$.

d) Donner, pour ce régime établi, les valeurs maximales des tensions $u_e(t)$ et $u_s(t)$ du montage.

II.B.3) *Influence de la variation de l'inductance sur la fréquence des oscillations*

a) Du fait de la présence d'un matériau métallique, l'inductance L varie de la valeur $L_1 = 2 \text{ mH}$ à la valeur $L_1 + \Delta L_1$ (voir partie I) telle que $\Delta L_1 / L_1 \approx -5 \cdot 10^{-4}$. Quels sont les paramètres affectés par cette variation ? Calculer $\Delta \omega_0 / \omega_0$ qui résulte de cette variation.

b) On désigne par $f + \Delta f$ la fréquence des oscillations lorsque $L = L_1 + \Delta L_1$ et f , celle des oscillations lorsque $L = L_1$. Pourquoi, selon vous, n'essaie-t-on pas de mesurer Δf sur une courbe analogue à celle de la figure II.B, tracée pour $L = L_1 + \Delta L_1$? Un calcul numérique permet d'évaluer $\Delta f \approx 38 \text{ Hz}$. Calculer $\Delta f / f$.

Dans toute la suite, on assimilera la tension de sortie u_s de l'oscillateur à son fondamental, c'est-à-dire à une sinusoïde de fréquence f calculée en II.B.2 ou II.B.3.

Partie III - Détecteur de métal

L'oscillateur précédent est réalisé en double exemplaire : le premier montage utilise comme inductance la bobine $\mathcal{B}_1$, constituée par le circuit étudié en partie I ; le deuxième montage utilise un composant de référence. Lorsque $\mathcal{B}_1$ est éloignée de tout métal, son inductance vaut L_1 , valeur identique à celle du composant de référence, égale à 2 mH . Par ailleurs, sans la proximité de métal, tous les autres composants des deux oscillateurs autres que l'inductance étant identiques, ces derniers produisent une tension sinusoïdale de même amplitude et de même fréquence évaluée en II.B.2. Lorsqu'on approche un métal de $\mathcal{B}_1$, son inductance varie de ΔL_1 . Ceci modifie la fréquence des oscillations de la tension de sortie de l'oscillateur contenant $\mathcal{B}_1$, qui devient $f + \Delta f$.

Pour résumer, le premier oscillateur est sensible à la présence de métal, car ce dernier modifie l'inductance de la bobine du montage oscillateur. Le deuxième oscillateur n'est pas sensible à la présence du métal, il sert de référence. L'ensemble constitue le détecteur de métal.

Cette partie propose une méthode de détection de cette variation de fréquence. Le principe de fonctionnement est décrit sur la figure III.A.

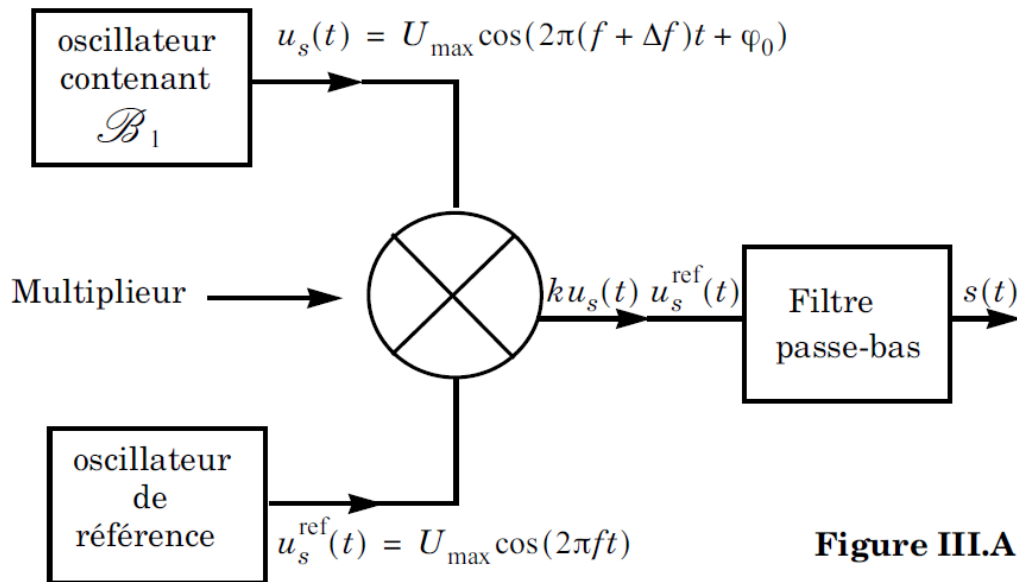


Figure III.A

Les tensions de sortie des deux oscillateurs, notées $u_s(t)$ et $u_s^{\text{ref}}(t)$, constituent les deux entrées d'un montage multiplieur qui délivre une tension intermédiaire $v(t) = k u_s(t) u_s^{\text{ref}}(t)$ proportionnelle au produit de ses deux tensions d'entrée, le coefficient k étant caractéristique du multiplieur.

III.A - Montrer que $v(t)$ peut se mettre sous la forme d'une somme de deux tensions sinusoïdales dont on déterminera les fréquences respectives. En supposant que $\Delta f/f < 0,01$, donner l'ordre de grandeur de ces fréquences (ou à défaut de leur valeur maximale).

III.B - On place à la suite du multiplieur un filtre passe bas du premier ordre de fréquence de coupure $f_c = 1 \text{ kHz}$ vérifiant $\Delta f \ll f_c \ll f$.

III.B.1) Proposer un montage simple, de gain statique égal à 1, réalisant cette fonction. On proposera des valeurs pour les composants choisis.

III.B.2) Déterminer le signal de sortie du filtre $s(t)$. Calculer le rapport des amplitudes des deux tensions sinusoïdales qui composent $s(t)$. Discuter la qualité du filtre.

III.C - La tension de sortie $s(t)$, après avoir subi une amplification en puissance, alimente un haut parleur. Sachant que l'oreille humaine détecte des vibrations sonores dès lors que leur fréquence atteint 20 Hz , estimer la valeur minimale de $\Delta f/f$ détectable. Peut-on détecter la variation de fréquence obtenue en II.B.3 ?

PARTIE 1. FABRICATION D'UN SIGNAL MODULÉ EN AMPLITUDE

La modulation d'amplitude est une technique intervenant dans la transmission, via une onde électromagnétique, d'un signal informatif (téléphonie, radio, télévision...).

Généralités sur la modulation d'amplitude

Pour transmettre une onde sonore (un signal informatif supposé sinusoïdal de pulsation ω), on module l'amplitude d'une porteuse de pulsation Ω très supérieure à ω .

- 1.1) À quel intervalle de fréquences correspond le domaine audible ?
Quelle est la célérité de l'onde modulée transmise par voie hertzienne ?
- 1.2) Donner deux raisons essentielles justifiant la nécessité de la modulation (en amplitude ou en fréquence, par exemple) pour transporter un signal par voie hertzienne par l'intermédiaire d'une onde électromagnétique.
- 1.3) Le signal modulé $s(t)$ obtenu est mis sous la forme usuelle $s(t) = s_0(1 + m \cos \omega t) \cos \Omega t$, dans laquelle m est un réel positif, appelé taux de modulation. L'image électrique de ce signal pourra être obtenue sous forme d'une tension (on écrira alors $s(t) = v(t)$, grandeur exprimée en volt) ou sous forme d'une intensité (on écrira alors $s(t) = i(t)$, grandeur exprimée en ampère).

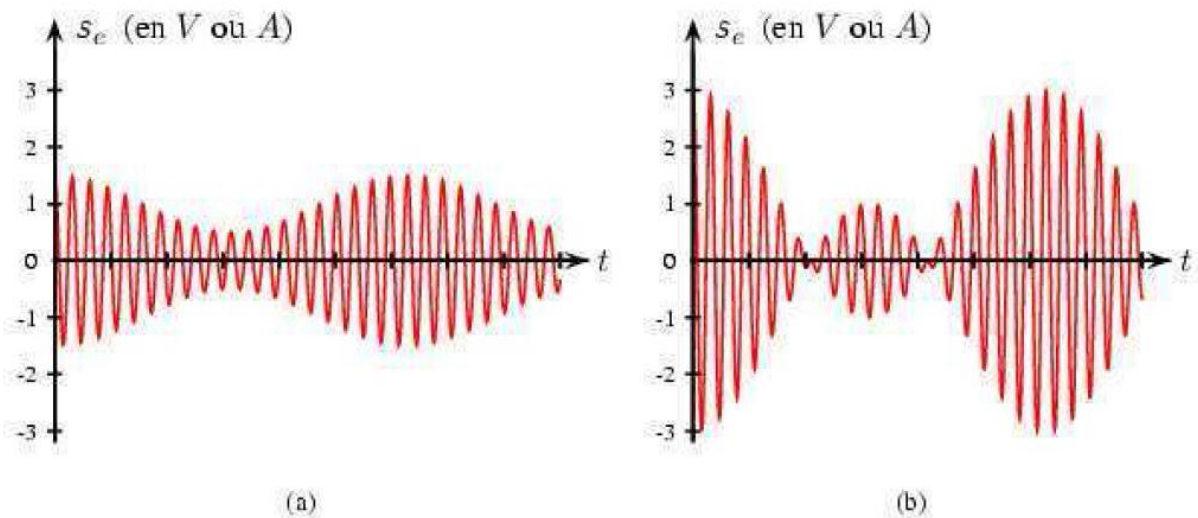


FIG. 1 - Signaux obtenus avec différents taux de modulation

- 1.3.a) Soient $s_{\max}$ et $s_{\min}$ les valeurs maximale et minimale de l'amplitude de $s(t)$. En faisant apparaître clairement $s_{\max}$ et $s_{\min}$ sur l'une ou l'autre des figures précédentes (qui sera reproduite sur la copie), exprimer le taux de modulation m en fonction de $s_{\max}$ et $s_{\min}$.

1.3.b) Calculer les taux de modulation correspondant aux deux graphes proposés.

1.3.c) Représenter le signal modulé dans le cas $m = 1$.

Fabrication d'un signal modulé en amplitude

Pour réaliser l'émission, nous allons utiliser un courant électrique modulé en amplitude, d'intensité $i(t) = I_0(1 + m \cos \omega t) \cos \Omega t$, où $\Omega \gg \omega$

L'intensité électrique délivrée par la source de courant circule dans un dipôle oscillant, l'émetteur, qui réalise l'émission. L'ensemble est représenté sur la **figure 2**.

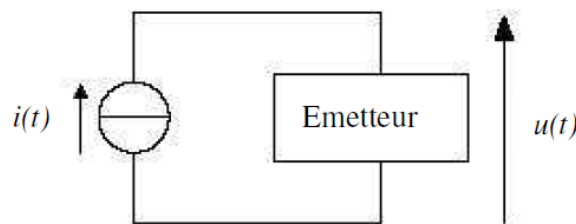


FIG. 2 - Schéma de l'émetteur

Nous ne nous intéresserons pas à l'émetteur, mais seulement à la source de courant, que nous allons tenter de fabriquer.

1.4) Représenter, en le justifiant, le spectre fréquentiel de l'intensité délivrée par la source (on notera

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \text{ et } F = \frac{\Omega}{2\pi}).$$

1.5) En déduire que la source de courant peut être théoriquement fabriquée à l'aide de trois sources de courant sinusoïdales idéales, associées de façon très simple. Préciser

- les expressions complètes (amplitude et pulsation) des intensités $i_1(t)$, $i_2(t)$ et $i_3(t)$ délivrées par chacune des sources ;
- le montage réel de la source équivalente.

PARTIE 2. DÉMODULATION D'AMPLITUDE

Pour récupérer l'information contenue dans un signal modulé en amplitude, plusieurs approches sont possibles, dont les deux suivantes. La première exploite les possibilités d'un circuit passif à base de diode, la seconde repose sur l'emploi d'un multiplieur.

Démodulation par détection d'enveloppe (à l'aide d'une diode)

Un récepteur capte, par voie hertzienne, un signal modulé qu'il traduit sous la forme d'une tension $v_e(t) = V_0(1 + m \cos \omega t) \cos \Omega t$.

Pour en extraire l'information, on utilise le dispositif suivant (voir **figure 3**) appelé détecteur d'enveloppe ou de crête. Il est constitué d'une diode idéale, d'une résistance et d'un condensateur, ces deux derniers formant la cellule RC. La valeur des composants est adaptée au signal à démoduler.

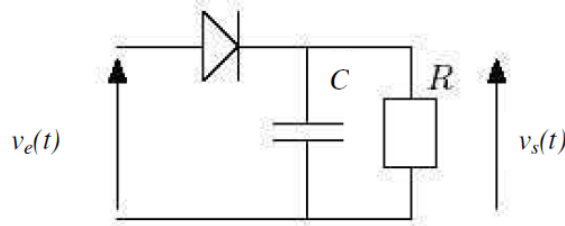


FIG. 3 - Démodulateur à diode

2.1) Soient $\tau = RC$ la constante de temps de la cellule RC et $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ la période de la porteuse du signal d'entrée.

En raisonnant qualitativement sur le fonctionnement de la cellule RC, selon l'état passant ou bloqué de la diode, établir une inégalité liant τ et T permettant d'obtenir en sortie la tension approchée $v_s(t) \approx V_0(1 + m \cos \omega t)$.

Cette expression approchée sera conservée pour les questions suivantes.

2.2) Établir l'expression de l'intensité traversant la diode, lorsque celle-ci est passante, en fonction de $v_s(t)$ et de ses éventuelles dérivées par rapport au temps.

Déduire de la question précédente que l'intensité traversant la diode peut être mise sous la forme

$$i_D(t) = \frac{V_0}{R} [1 + g \cos(\omega t + \varphi)] \text{ avec } g > 0,$$

où g sera explicitée en fonction de m , R , C , ω et $\tan \varphi$ en fonction de R , C et ω .

2.3) L'intensité du courant traversant la diode quand celle-ci est passante ne pouvant être que strictement positive, en déduire que la constante de temps τ du filtre doit obligatoirement être inférieure à une certaine valeur que l'on exprimera en fonction de m (supposé inférieur à 1) et ω .

2.4) Les conditions d'utilisation du montage sont telles que $\omega = 3,14 \cdot 10^4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $m = 0,7$.

Sachant que les deux pulsations (ω et Ω) sont dans un rapport 100, déterminer un encadrement numérique de la constante de temps τ .

2.5) On place tour à tour, en entrée de la cellule RC, les tensions $v_e(t) = s_e(t)$ représentées sur les **figures 1(a) et 1(b)**, tracées pour des valeurs quelconques de m .

2.5.a) Représenter, dans chaque cas, les tensions v_s obtenues en sortie du détecteur d'enveloppe.

2.5.b) L'un des deux signaux des **figures 1(a)-1(b)** n'est pas correctement démodulé par ce montage. Identifier le signal dont il s'agit et le représenter correctement démodulé. Préciser la condition portant sur m assurant une démodulation correcte.

Démodulation synchrone (à l'aide d'un multiplieur)

L'utilisation d'un multiplieur va permettre de résoudre quelques-unes des limitations rencontrées par le démodulateur à diode.

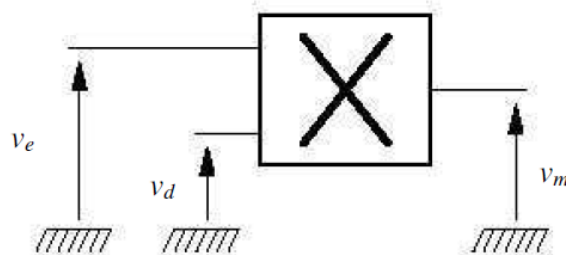


FIG. 4 - Schéma de principe d'un multiplieur

Le montage représenté sur la **figure 4** est câblé de façon à ce que $v_m(t) = kv_e(t)v_d(t)$, où k est une constante positive caractéristique du multiplieur.

On place, sur la première entrée, le signal à démoduler, réceptionné par voie hertzienne, dont l'équation est $v_e(t) = V_0(1 + m \cos \omega t) \cos \Omega t$ et on impose, sur la seconde entrée, la tension $v_d(t) = V_d \cos \Omega t$.

En sortie du multiplieur, le signal traverse un filtre qui peut être de type passe-haut ou passe-bas, selon le traitement souhaité (voir **figure 5**).

Les diverses caractéristiques de chacun des filtres sont fournies en annexe.

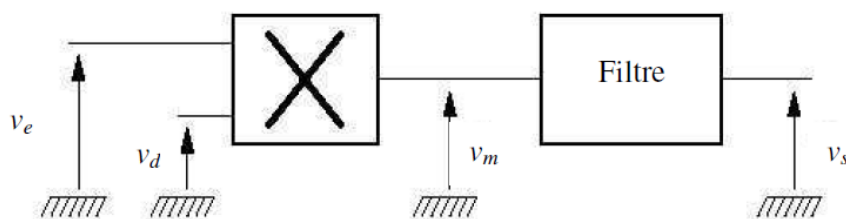


FIG. 5 – Filtrage

- 2.6) Représenter, en le justifiant, le spectre du signal v_m en sortie du multiplieur, en indiquant l'amplitude des différentes composantes spectrales.
- 2.7) Une partie du signal v_m représente l'information recherchée.
- 2.7.a) Parmi les filtres 1 et 2 fournis en annexe, justifier quel est celui qui doit être employé pour sélectionner cette information.
Ce choix sera maintenu dans toute la suite du problème.
- 2.7.b) Dédurre des documents disponibles la fréquence de coupure du filtre choisi.
- 2.8) Pour tester le montage ainsi réalisé, on place sur son entrée v_e le signal $s_e(t)$ de la **figure 1(b)**.
- 2.8.a) Exprimer la tension v_s en sortie du filtre.
- 2.8.b) Représenter v_s .
- 2.8.c) Citer au moins un avantage de la démodulation par un multiplieur par rapport à celle à diode.
- 2.9) Les paramètres du filtre employé (l'ordre n et le gain H_0) étaient inconnus jusqu'à ce que l'on mesure la valeur absolue du gain, à une fréquence donnée. Ainsi, à 100 kHz, on a trouvé $|G| = 50\text{dB}$.
- 2.9.a) En exploitant cette mesure et les documents fournis en annexe, déterminer H_0 .
- 2.9.b) Calculer, de la même façon, l'ordre n de ce filtre.
- 2.10) Pour parfaire le filtrage, un condensateur, de capacité C , est placé en série en sortie du filtre. Le signal alors démodulé est transformé en onde sonore par l'intermédiaire d'un haut-parleur (voir **figure 6**).

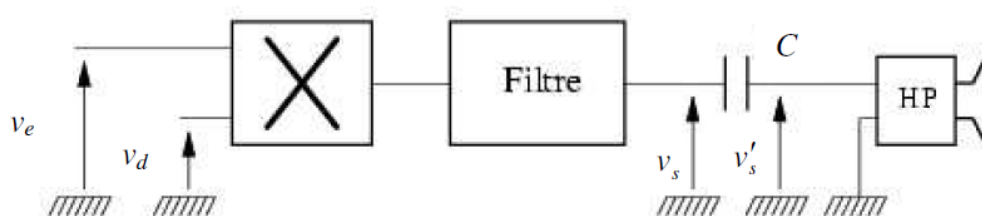


FIG. 6 - Chaîne de réception

- 2.10.a) En assimilant le haut-parleur à une résistance R_0 , préciser le rôle du condensateur.
- 2.10.b) En prenant pour v_s sa représentation déterminée à la **question 2.8.b**, représenter l'allure du signal v'_s .

Fin de l'énoncé

ANNEXE

Filtre 1	Filtre 2
Fonctions de transfert	
$H_1(j\omega) = \frac{H_0}{1 + \left(j\frac{\omega}{\omega_c}\right)^n}$	$H_2(j\omega) = \frac{H_0 \left(j\frac{\omega}{\omega_c}\right)^n}{1 + \left(j\frac{\omega}{\omega_c}\right)^n}$
Courbes de gain	
<i>(Certaines données sont volontairement absentes des axes des ordonnées)</i>	
Courbes de phase	